

**TD3**

**Exercice 1.** Un train part d'une gare A au temps  $t = 0$  et arrive en gare B au temps  $t = 30$  (exprimé en minutes). On note  $v(t)$  la vitesse instantanée (exprimée en kilomètres par minute) du train à l'instant  $t$ . On a

$$v(t) = \begin{cases} \min(4, t) & \text{pour } 0 \leq t \leq 24 \quad (\min(a, b) \text{ est le plus petit des deux réels } a \text{ et } b) \\ 28 - t & \text{pour } 24 \leq t \leq 26 \\ 2 & \text{pour } 26 \leq t \leq 29 \\ 60 - 2t & \text{pour } 29 \leq t \leq 30 \end{cases}$$

- Tracer la courbe représentative de la fonction vitesse.
- Déterminer la distance parcourue par le train entre les gares A et B.
- Donner la vitesse moyenne du train sur le parcours en  $\text{km} \cdot \text{mn}^{-1}$  puis en  $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ .

**Exercice 2.** a) Déterminer la primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $f : x \mapsto 1 - 2x + x^2$  qui s'annule en 0, puis celle qui s'annule en 2.

b) Soit  $g : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par  $g(t) = \frac{2}{t} - t$ . Déterminer la primitive de  $g$  qui s'annule en 1, puis celle qui vaut 3 en  $e$ .

**Exercice 3.** Trouver les primitives sur  $I$  de la fonction  $f$  dans chacun des cas suivants.

- $I = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (2x + 1)^3$  ;
- $I = \mathbb{R}$ ,  $f(t) = e^{\lambda t}$  ( $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ) ;
- $I = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = b^x$  ( $b \in \mathbb{R}_+^*$ ) ;
- $I = ]-1, +\infty[$ ,  $f(x) = (x + 1)^\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) ;
- $I = ]-\infty, 3]$ ,  $f(s) = \sqrt{3 - s}$  ;
- $I = ]3, +\infty[$ ,  $f(x) = \frac{1}{(x - 3)^n}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) ;
- $I = ]-1/3, +\infty[$  ou  $I = ]-\infty, -1/3[$ ,  $f(t) = \frac{4}{3t + 1}$  .

**Exercice 4.** Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$  et soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. On suppose que  $\forall x \in [a, b] \quad m \leq f(x) \leq M$ . Montrer que la valeur moyenne de  $f$  sur l'intervalle  $[a, b]$  est comprise entre  $m$  et  $M$ .

**Exercice 5.** Calculer les intégrales suivantes.

- $\int_1^4 (x + 2)^2 dx$
- $\int_1^2 \frac{x^3 - 1}{x^2} dx$
- $\int_a^{3a} \frac{ds}{s}$  ( $a \in \mathbb{R}^*$ )
- $\int_1^8 x^{1/3} dx$
- $\int_0^1 e^{3t} - e^{-t} dt$
- $\int_0^{\pi/4} \cos(3s) ds$
- $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

**Exercice 6.** a) Exprimer  $\cos(2x)$  en fonction de  $\cos^2 x$ , puis en fonction de  $\sin^2 x$ . En

déduire une primitive de  $\cos^2$  et une primitive de  $\sin^2$  sur  $\mathbb{R}$ .

b) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , donner une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $x \mapsto \cos x (\sin x)^n$ . En déduire une primitive de la fonction  $\cos^3$ .

c) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , donner une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $x \mapsto \sin x (\cos x)^n$ . En déduire une primitive de la fonction  $\sin^3$ .

d) Calculer  $\int_0^{\pi/2} (\sin t)^2 - (\cos t)^3 dt$ .

**Exercice 7.** Calculer les intégrales suivantes. On remarquera que la fonction intégrée peut être écrite sous la forme  $x \mapsto f(u(x))u'(x)$ .

a)  $\int_1^x \frac{\cos \sqrt{t}}{2\sqrt{t}} dt$  ( $x \in \mathbb{R}_+^*$ )      b)  $\int_0^{\pi/4} \tan x dx$       c)  $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2} dt$

**Exercice 8.** a) En utilisant l'identité  $x^3 = x(x^2 + 1) - x$ , calculer  $\int_0^2 \frac{x^3}{1+x^2} dx$ .

b) Calculer  $\int_0^2 \frac{x^4}{1+x^2} dx$  par une méthode analogue.

**Exercice 9.** a) Donner le domaine de définition  $D$  de la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - x - 2}$

b) Trouver deux constantes réelles  $a$  et  $b$  telles que

$$\forall x \in D, f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2}$$

c) Calculer  $\int_0^1 f(x) dx$ .

**Exercice 10.** Calculer  $\int_0^\pi |\cos t| dt$ . *Indication : étudier le signe de la fonction cos sur  $[0, \pi]$  et utiliser la relation de Chasles.*

**Exercice 11.** Calculer les intégrales suivantes en utilisant un changement de variable.

a)  $\int_2^e \frac{(\ln x)^3}{x} dx$       b)  $\int_0^3 x^2 \sqrt{1+x} dx$  (poser  $s = \sqrt{1+x}$ )

**Exercice 12.** En utilisant le changement de variable  $x = e^t$ , calculer les intégrales suivantes.

a)  $\int_{-1}^1 \frac{e^t}{1+e^{2t}} dt$       b)  $\int_0^2 \frac{dt}{2+e^{-t}}$

**Exercice 13.** Calculer à l'aide d'une (ou plusieurs) intégration(s) par parties les intégrales

suivantes.

$$a) \int_1^3 \frac{\ln t}{t^2} dt \quad b) \int_0^{2\pi} (x+1) \sin x dx \quad c) \int_0^1 x^2 e^{-2x} dx$$

**Exercice 14.** En utilisant  $u = \arctan$  et  $v(x) = x$  pour une intégration par parties, donner toutes les primitives sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $\arctan$ .

**Exercice 15.** En utilisant deux intégrations par parties, calculer  $\int_0^x e^t \sin t dt$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

### EXERCICES COMPLEMENTAIRES

**Exercice 16.** a) Justifier que la fonction  $f : t \mapsto \frac{e^t}{t}$  admet une primitive  $F$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ . On ne cherchera pas à calculer  $F(t)$ .

b) On considère la fonction  $h : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $h(x) = \int_1^{x^2} \frac{e^t}{t} dt$ . Donner une expression de  $h(x)$  qui utilise la fonction  $F$ . En déduire que  $h$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et calculer  $h'(x)$ .

**Exercice 17.** On définit une fonction  $h : ]-\pi/2, 3\pi/2[ \rightarrow \mathbb{R}$  en posant  $h(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$ . Calculer la dérivée de  $h$ . Utiliser le résultat obtenu pour calculer  $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \sin x} dx$  et

$$\int_0^{\pi/3} \frac{1}{1 + \sin x} dx.$$

**Exercice 18.** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_n = \int_0^{\pi/4} (\tan t)^n dt$ .

a) Calculer  $I_0$  et  $I_1$ .

b) Pour  $n$  quelconque, calculer  $I_n + I_{n+2}$  (*Indication : mettre  $(\tan t)^n$  en facteur dans l'intégrale à calculer*).

c) En déduire  $I_2, I_3, I_4, I_5$ .

**Exercice 19.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction continue et périodique de période  $T$ . Soit  $a, b \in \mathbb{R}$ .

a) Montrer en utilisant un changement de variable que  $\int_a^b f(x) dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x) dx$ .

b) En déduire que  $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_b^{b+T} f(x) dx$  (utiliser la relation de Chasles).

**Exercice 20.** Calculer les intégrales suivantes.

a)  $\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$  (utiliser un changement de variable)    b)  $\int_1^2 x \ln x dx$     c)  $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$

**Exercice 21.** Calculer les intégrales suivantes.

a)  $\int_0^1 7x(3x^2 + 1)^4 dx$     b)  $\int_0^2 s\sqrt{s^2 + 1} ds$     c)  $\int_0^1 \ln(1 + x^2) dx$ .

**Exercice 22.** a) En utilisant l'identité  $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1$ , trouver une primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 4x + 5}$ . Calculer  $\int_1^3 \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}$ .

b) Soit  $a$  un réel strictement positif. Donner une primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{1 + (x/a)^2}$ .

En déduire une primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{a^2 + x^2}$ .

Application : calculer l'intégrale  $\int_0^b \frac{dx}{3 + x^2}$  et déterminer sa limite lorsque  $b$  tend vers  $+\infty$ .