# TD4

**Exercice 1.** Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles

$$a. \quad 4y' + 3y = 0 \qquad b. \quad (1+t^2)y' - 2ty = 0 \qquad c. \quad (1+t^2)y' - ty = 0$$

**Exercice 2.** Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = \left(2 - \dfrac{1}{t}\right)y \\ y(2) = 1 \end{cases}$ .

**Exercice 3.** a) Trouver une solution particulière (de la forme $t \mapsto c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t)$, avec $c_1$, $c_2$ constantes réelles ) de l'équation différentielle $y' - y = \cos(3t)$.
b) Trouver une solution particulière (de la forme $t \mapsto ce^{4t}$ avec $c$ constante réelle) de l'équation différentielle $y' - y = e^{4t}$.
c) En déduire une solution particulière de l'équation différentielle $(E')$ $y' - y = \cos(3t) + e^{4t}$.
d) Résoudre $(E')$.

**Exercice 4.** On considère l'équation différentielle $(E) \quad 7y' + 2y = t^2 - 3t + 5$.
a) Résoudre l'équation homogène associée.
b) Chercher une solution particulière de $(E)$ qui soit une fonction polynomiale de degré 2, puis résoudre $(E)$.
c) Déterminer l'unique solution de $(E)$ prenant la valeur 3 en 7.

**Exercice 5.** La loi de refroidissement de Newton stipule que la vitesse de refroidissement d'un corps inerte est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant. La température (en $^oC$) du corps à l'instant $t$ (en minutes) est notée $\theta(t)$. La température du milieu ambiant est noté $T_0$.
La loi de Newton se traduit mathématiquement ainsi : la fonction $\theta$ est solution de l'équation différentielle $y' = -\mu(y - T_0)$ , où $\mu > 0$ est une constante qui dépend du corps inerte (c'est le coefficient de proportionnalité, qui est fixé).
a) Résoudre cette équation différentielle.
b) Dans une pièce dont la température est de $20^oC$, on met une tasse de thé de température $80^oC$. On constate qu'au bout de 2 minutes, la température du thé a baissé à $60^oC$. Déterminer la valeur du coefficient $\mu$. Quelle est la température du thé au bout de 4 minutes?

**Exercice 6.** Résoudre les équations différentielles suivantes :
a. $ty' + 3y - 2t^5 = 0$ (sur $]0, +\infty[$) b. $y' + (\tan t)y = \sin(2t)$ (sur $]-\pi/2, \pi/2[$) .

**Exercice 7.** Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' - 3y = \dfrac{2e^{3t}}{1+t^2} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

**Exercice 8.** Résoudre l' équation différentielle $y'' - y' - y = 0$

**Exercice 9.** a) Résoudre l' équation différentielle $-2y'' + 6y' - \dfrac{9}{2}y = 0$.

b) Parmi les solutions trouvées en a), déterminer celle qui vérifie les conditions initiales $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$.

**Exercice 10.** a) Résoudre le problème de Cauchy : $\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = 0 \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$ .

b) Donner l'allure de la courbe représentative de la solution trouvée en a).

**Exercice 11.** Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$a. \quad y'' - 4y' + 4y = \cos t \; ; \qquad\qquad b. \quad y'' + y' + \frac{y}{2} = te^{-2t} \; .$$

**Exercice 12.** Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} 3y'' - 2y' - y = 3t^2 + 1 \\ y(0) = -2 \, , \, y'(0) = 1 \end{cases}$ .

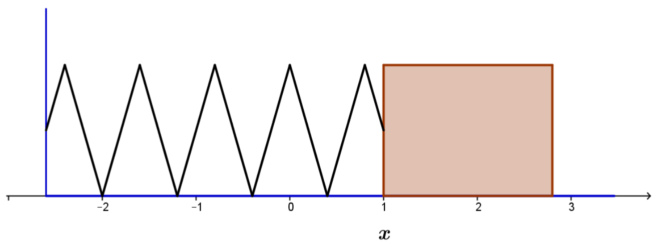
EXERCICES COMPLEMENTAIRES

**Exercice 13.**

Un mobile est fixé à un ressort comme dans le dessin ci-contre. La position d'équilibre est $x = 0$. Le mobile est soumis à une force exercée par le ressort (qui est nulle si $x = 0$), et lorsqu'il se déplace, à une force de frottement proportionnelle à sa vitesse. On s'intéresse à la fonction $t \mapsto x(t)$ qui à $t \in [0, +\infty[$ associe la position du mobile à l'instant $t$ : $t$ est exprimé en secondes et $x$ en mètres. En notant $\dot{x}(t)$ et $\ddot{x}(t)$ les dérivée et dérivée seconde de la fonction $t \mapsto x(t)$ , on a :

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - \alpha\dot{x}(t) \, ,$$

où $k$ est une constante qui dépend du ressort et $\alpha$ un coefficient de frottement.
On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le mobile est à la position $x = 1$ et sa vitesse est nulle.




a) On suppose $\alpha = 0$. Déterminer $x(t)$; en déduire que le mouvement du mobile est périodique.

b) On suppose $\alpha > 0$. Déterminer $x(t)$. On distinguera différents cas selon le signe de $\alpha^2 - 4km$.

**Exercice 14.** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(1 + e^{2t})y' - e^{2t}y = 0$ .

**Exercice 15.** Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = 5t \\ y(0) = 0 \, , \, y'(0) = 1 \end{cases}$ .

**Exercice 16.** Pour étudier l'évolution d'une population de poissons au cours du temps, on utilise le modèle suivant. On admet que la fonction $N$, représentant le nombre de poissons en fonction du temps $t$ (exprimé dans une unité adéquate) vérifie les conditions suivantes.

i) $N$ ne prend pas la valeur 0 et est solution de l'équation différentielle $(E)\quad y' = y\left(1 - \dfrac{y}{K}\right)$ , où $K$ est une constante strictement positive.

ii) Pour $t = 0$, $N$ vaut $N_0$.

a) Soit $f$ la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = \dfrac{1}{N(t)}$. Montrer que $f$ est une solution sur $[0, +\infty[$ d'une équation différentielle linéaire du premier ordre (E') qu'on écrira.

b) Résoudre $(E')$.

c) Exprimer $f(t)$, puis $N(t)$ en fonction de $t$, $K$ et $N_0$ pour $t \in [0, +\infty[$. La fonction $N$ admet-elle une limite en $+\infty$?

**Exercice 17.** On veut trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ f'(x) = 2f(-x)\,. \tag{1}$$

a) Montrer que si la fonction $f$ est dérivable et vérifie (1), alors $f$ est deux fois dérivable et est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre qu'on donnera.

b) Résoudre l' équation différentielle linéaire du second ordre obtenue en a) .

c) Trouver toutes les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient (1).