Chap. 3 Intégration.

L1S1 Portails Math-Info & Math-Physique
Analyse 1

2021-22

1 Intégrale d'une fonction sur un intervalle $[a, b]$

1.1 Vitesse et distance

On considère un véhicule roulant à la vitesse v_1 (exprimée en $km.h^{-1}$) entre les instants (exprimés en heures) $t = 0$ et $t = t_1$ et à la vitesse v_2 entre les instants $t = t_1$ et $t = t_1 + t_2$. On se demande quelle est la distance d (exprimée en km) parcourue entre les instants $t = 0$ et $t = t_1 + t_2$.

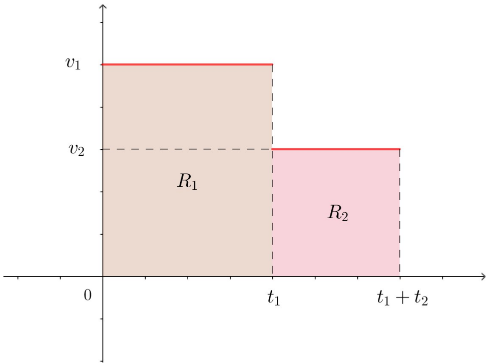
Pendant la première phase, de durée t_1, le véhicule roule à la vitesse v_1 et parcourt donc une distance $d_1 = v_1 \times t_1$. Pendant la deuxième phase, de durée t_2, le véhicule parcourt une distance $d_2 = v_2 \times t_2$. La distance parcourue totale est donc

$$d = v_1 \times t_1 + v_2 \times t_2 \,.$$

La vitesse moyenne du véhicule entre les instants 0 et $t_1 + t_2$ est

$$v_{moy} = \frac{d}{t_1 + t_2} = \frac{v_1 \times t_1 + v_2 \times t_2}{t_1 + t_2} \,.$$

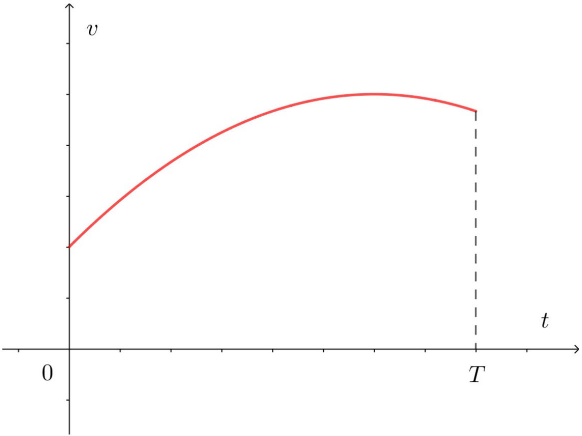
Considérons à présent la courbe représentative de la vitesse (en fonction du temps), dans le plan muni d'un repère orthonormé.



Le domaine D compris entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de la vitesse est constitué de deux rectangles R_1 et R_2. L'aire de R_1 est $v_1 \times t_1$ et l'aire de R_2 est $v_2 \times t_2$. On remarque que

$$Aire(D) = Aire(R_1) + Aire(R_2) = v_1 \times t_1 + v_2 \times t_2 = d \,.$$

Supposons à présent que la vitesse du véhicule change de manière continue entre les instants $t = 0$ et $t = T$. La fonction vitesse $(t \mapsto v(t))$ est représentée par la courbe suivante.



Dans ce cas, comment peut-on déterminer la distance parcourue par le véhicule entre les instants 0 et T?

Une méthode pour estimer cette distance est de diviser l'intervalle $[0, T]$ en n sous-intervalles de longueur T/n, en introduisant les temps intermédiaires $t_i = \frac{iT}{n}$. Notons $v_i = v(t_i)$ la vitesse à l'instant t_i.

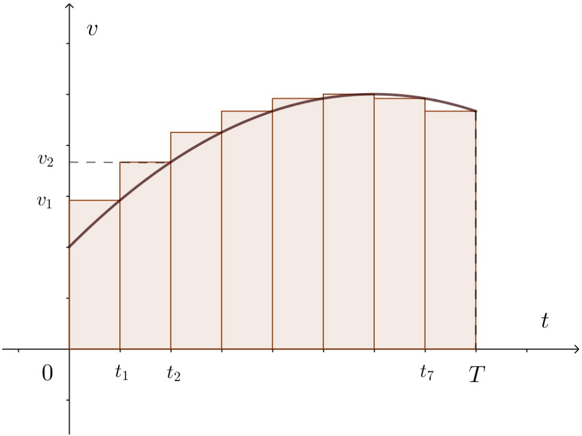
Si n est grand, t_{i-1} est proche de t_i, et on peut considérer qu'entre les instants t_{i-1} et t_i, la vitesse reste "presque" égale à $v_i := v(t_i)$. Ainsi, la distance d_i parcourue par le véhicule entre les instants t_{i-1} et t_i est "presque" égale à $v_i \times (t_i - t_{i-1}) = v_i \times T/n$. L'erreur associée à cette approximation est petite par rapport à $1/n$: $d_i = v_i \times T/n + \epsilon_i$, avec $\epsilon_i << 1/n$ (pour n grand). Finalement, en notant d la distance parcourue total (entre les instants 0 et T), on obtient

$$d = d_1 + d_2 + \ldots + d_n \simeq \widetilde{d}(n)\,,$$

où

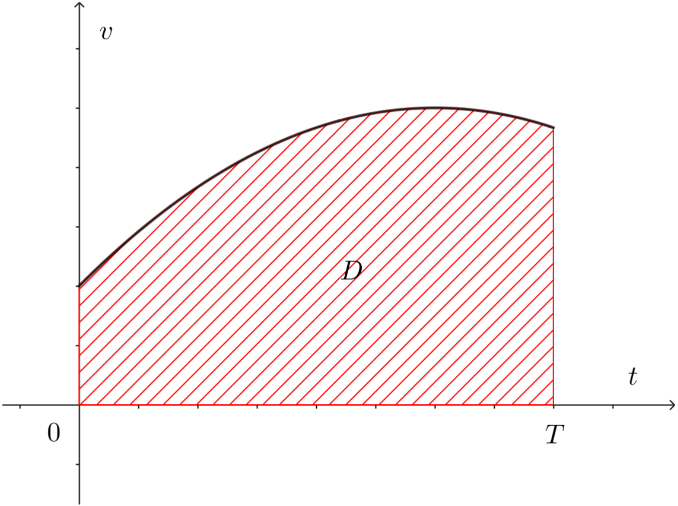
$$\widetilde{d}(n) = v_1 \times \frac{T}{n} + v_2 \times \frac{T}{n} + \ldots + v_n \times \frac{T}{n} \tag{1}$$

Lorsque n devient très grand, $\widetilde{d}(n)$ tend vers la valeur exacte d.

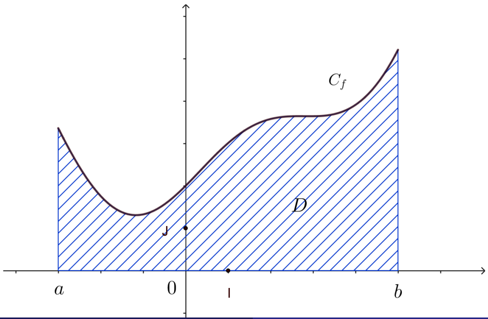


La distance parcourue totale approchée $\widetilde{d}(n)$ obtenue en (1) est la somme des aires des rectangles (de largeur T/n) apparaissant sur le dessin.

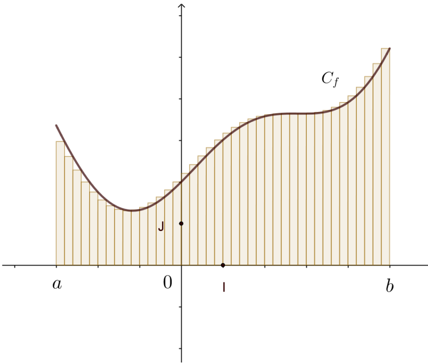
Lorsque n devient grand, cette somme d'aires tend vers l'aire sous la courbe représentative de v. La distance parcourue exacte d est donc égale à l'aire sous la courbe représentative de v.



a) Cas d'une fonction à valeurs positives. Notons C_f la courbe représentative, dans un repère orthonormé (O, OI, OJ) du plan, d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ne prenant que des valeurs positives. L'intégrale de f entre a et b est définie comme l'aire du domaine situé entre l'axe des abscisses et C_f. Cette intégrale est notée $\int_a^b f(x)\, dx$, ou simplement $\int_a^b f$. Autres notations possibles : $\int_{[a,b]} f(x)\, dx$, $\int_{[a,b]} f$.



Remarque. Supposons la fonction f continue. Comme remarqué en 1.1, l'aire qui définit $\displaystyle\int_a^b f$ peut être approchée par une somme d'aires de rectangles, obtenus en divisant $[a, b]$ en n sous intervalles $[a_{i-1}, a_i]$ de longueur $\dfrac{b-a}{n}$, avec $a_i = a + \dfrac{i(b-a)}{n}$, et en considérant pour chaque i le rectangle de base $[a_{i-1}, a_i]$ et de hauteur $f_i := f(a_i)$.



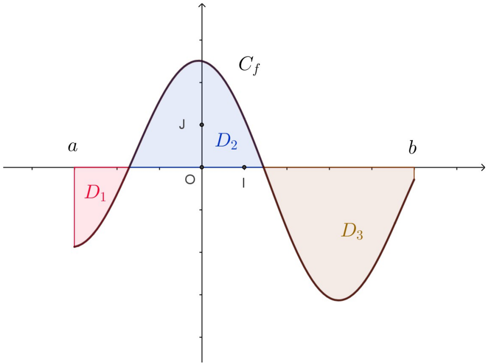
L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est ainsi approchée par la somme

$$I_n(f; a, b) = \frac{b-a}{n}(f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_n)) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a + i(b-a)/n)\,.$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, $I_n(f; a, b)$ tend vers $\int_a^b f$.

b) Dans le cas d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ pouvant prendre des valeurs négatives, on adopte la convention suivante pour définir l'intégrale $\int_a^b f$: l'aire d'un domaine situé au-dessus de l'axe des abscisses est comptée positivement; l'aire d'un domaine situé au-dessous de l'axe des abscisses est comptée négativement. Par exemple, pour la fonction f représentée ci-dessous, on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = -Aire(D_1) + Aire(D_2) - Aire(D_3)$$



Comme dans le cas des fonctions à valeurs positives, si f est continue, $\int_a^b f$ est la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $I_n(f; a, b)$, où

$$I_n(f; a, b) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a + i(b-a)/n) \, .$$

Les sommes $I_n(f; a, b)$ sont appelées sommes de Riemann pour l'intégrale $\int_a^b f$.

Remarque. Si $a = b$, l'intégrale est nulle : $\displaystyle\int_a^a f = 0$.

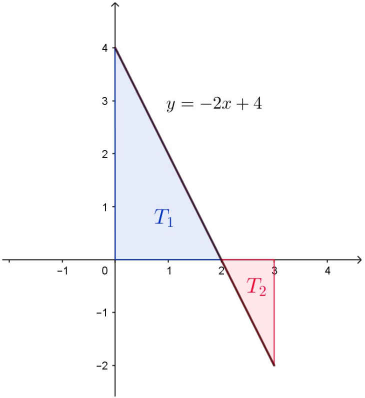
c) Exemples.

i) Dans le cas où f est une fonction constante : $f(x) = k$ pour tout $x \in [a, b]$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = k(b-a).$$

ii) Considérons la fonction
$g : [0,3] \to \mathbb{R}$ définie par
$g(x) = -2x + 4$. On a

$$\begin{aligned} \int_0^3 g(x)\,dx &= Aire(T_1) - Aire(T_2) \\ &= \frac{2\times 4}{2} - \frac{1\times 2}{2} \\ &= 4 - 1 = 3\,. \end{aligned}$$



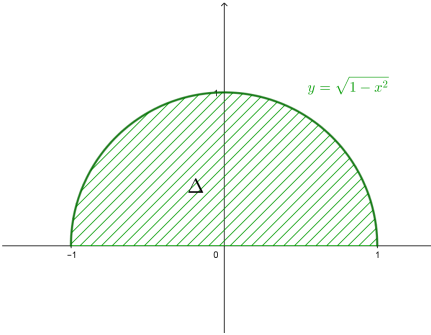
iii) Considérons la fonction $h : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Si le point M de coordonnés (x, y) appartient à la courbe représentative de h, alors

$$x^2 + y^2 = x^2 + \sqrt{1 - x^2}^2 = x^2 + (1 - x^2) = 1 \quad \text{et} \quad y \geq 0\,.$$

En fait la courbe représentative de h est le demi-cercle supérieur de centre O et de rayon 1.

$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$ est donc l'aire du domaine Δ, qui est un demi-disque :

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx = \mathrm{Aire}(\Delta) = \frac{\pi}{2}\,.$$



d) Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle $[a, b]$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (avec $a < b$). La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ est définie par

$$VM(f; a, b) = \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f(x)\, dx$$

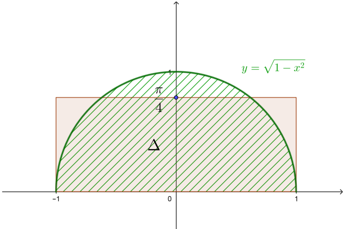
Remarque. Si $VM(f, a, b) = m$, alors $\int_{[a,b]} f(x)\, dx = \int_{[a,b]} m\, dx$.

Exemples. Reprenons les exemples ii) et iii) de c).

- La valeur moyenne sur $[0, 3]$ de la fonction $g : x \mapsto -2x + 4$ est $VM(g; 0, 3) = \frac{1}{3} \int_0^3 g = \frac{3}{3} = 1.$
- La valeur moyenne sur $[-1, 1]$ de la fonction $h : x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ est

$$VM(h; -1, 1) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} h = \frac{\pi}{4}.$$

Ci-contre, l'aire du domaine hachuré est égale à l'aire du rectangle.

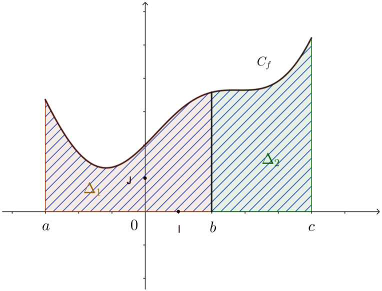


1.3 Premières propriétés

a) Relation de Chasles. Soit $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ (continue). Pour tout $b \in [a, c]$,

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

Dans le cas des fonctions à valeurs positives, cette relation se déduit facilement de la définition de l'intégrale comme une aire :



$$\begin{aligned}\int_a^c f &= \text{Aire de la partie hachurée}\\ &= \mathrm{Aire}(\Delta_1) + \mathrm{Aire}(\Delta_2)\\ &= \int_a^b f + \int_b^c f\end{aligned}$$

Pour le moment, nous n'avons défini $\int_a^b f$ que dans le cas où $a \leq b$. On va étendre la définition de la manière suivante: :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Pour $a, b \in I$ avec $a > b$, on pose

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx = -\int_{[b,a]} f\,.$$

Avec la convention ci-dessus, la relation de Chasles se généralise ainsi.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Pour tous $a, b, c \in I$,

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx\,.$$

b) Comparaison. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Si f ne prend que des valeurs positives, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f(x)\, dx \geq 0$.

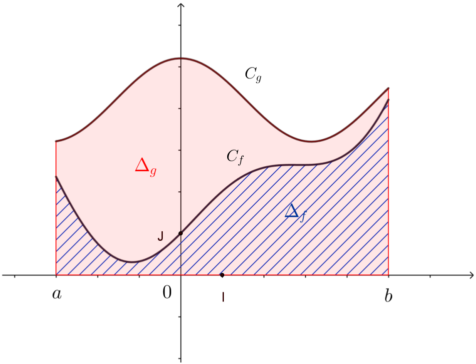
Cette propriété est une conséquence évidente de la définition de l'intégrale d'une fonction positive qu'on a donnée.

Attention, l'implication $\displaystyle f \geq 0 \Longrightarrow \int_a^b f(x)\, dx \geq 0$ n'est valide que si $a \leq b$.

Plus généralement, on a :

Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues. Si $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f(x)\, dx \leq \int_{[a,b]} g(x)\, dx$.

Dans le cas où f et g sont à valeurs positives, cette propriété est une conséquence immédiate de la définition de l'intégrale.



Si $f \leq g$, la courbe représentative de f est sous la courbe représentative de g, et $\Delta_f \subset \Delta_g$. On a donc $\mathrm{Aire}(\Delta_f) \leq \mathrm{Aire}(\Delta_g)$, c'est-à-dire $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$.

Comme précédemment, l'implication $\displaystyle f \leq g \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$ n'est valide que si $a \leq b$.

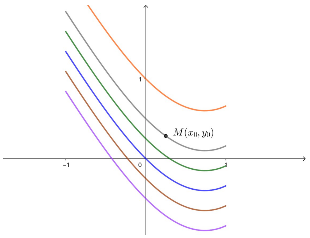
2 Primitives d'une fonction

2.1 Définition

On considère une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Une primitive de f est une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ dérivable dont la dérivée est égale à f :

$$F \text{ est une primitive de } f \iff F' = f\,.$$

Propriété. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, une fonction définie sur un intervalle I, admettant une primitive F. Les primitives de f sont les fonctions $F + c$ où $c \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire les fonctions obtenues en ajoutant une constante à F. De plus, pour tout couple $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$, il existe une unique primitive de f prenant en x_0 la valeur y_0.



Ci-contre sont représentées les courbes représentatives de primitives sur $]-1, 1[$ de $f : x \mapsto x - \cos(x)$. Tout point M d'abscisse dans $]-1, 1[$ appartient à la courbe représentative d'une (unique) primitive de f.

Remarque. Certaines fonctions définies sur un intervalle I n'admettent pas de primitive sur I. C'est le cas par exemple de la fonction $u :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par $u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-1,0[\\ 1 & \text{si } x \in [0,1[\end{cases}$. Pour une fonction définie sur un intervalle I, on a donc deux situations possibles :

- soit f n'a aucune primitive sur I ;
- soit f possède une infinité de primitives sur I, la différence entre deux primitives quelconques étant une fonction constante sur I.

Nous verrons dans la partie 3 les deux résultats fondamentaux suivants.

- Toute fonction continue sur un intervalle I possède des primitives sur I.
- Si f est continue sur l'intervalle $[a,b]$ et F est une primitive de f sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F|_a^b \overset{def}{=} F(b) - F(a)\,.$$

2.2 Tableau de primitives usuelles

Nom de la fonction f	Intervalle	Expression	Primitive F
Constante	$\mathbb{R}$	$f(x) = a$	$F(x) = ax + C$
Affine	$\mathbb{R}$	$f(x) = ax + b$	$F(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + C$
Puissance d'exposant n $(n \in \mathbb{Z}\ ,\ n \neq -1)$	$\mathbb{R}$ $(n \geq 0)$ $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ $(n < 0)$	$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
Inverse	$\mathbb{R}_+^*$ $\mathbb{R}_-^*$ $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$	$f(x) = 1/x$	$F(x) = \ln(x) + C$ $F(x) = \ln(-x) + C$ $F(x) = \ln(\lvert x \rvert) + C$
Puissance d'exposant α $(\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\})$	$]0, +\infty[$	$f(x) = x^\alpha$	$F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

Nom de la fonction f	Intervalle	Expression	Primitive F
Exponentielle	$\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$	$f(x) = e^x$ $f(x) = e^{ax}$ $(a \neq 0)$	$F(x) = e^x + C$ $F(x) = \frac{1}{a} e^{ax} + C$
Cosinus	$\mathbb{R}$	$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + C$
Sinus	$\mathbb{R}$	$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + C$
	$\mathbb{R}$	$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	$F(x) = \arctan(x) + C$
	$]-1,1[$	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$F(x) = \arcsin(x) + C$

Remarque. Les primitives sur $]-1,1[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ prennent aussi la forme $-\arccos + C$, avec C constante réelle.

2.3 Propriétés

Les règles de calcul des dérivées ont pour conséquence les propriétés suivantes.

- Si F est une primitive de f, alors pour toute constante réelle λ, λF est une primitive de λf.
- Si F est une primitive de f et G est une primitive de g, alors $F+G$ est une primitive de $f+g$.
- Soient u une fonction définie sur un intervalle I, supposée dérivable et à valeurs dans un intervalle J, et soit F une fonction définie et dérivable sur J. Alors la fonction $F \circ u$ est une primitive sur I de la fonction $(F' \circ u)u' : x \mapsto F'(u(x))u'(x)$.

En particulier :

- $x \mapsto e^{u(x)}$ est une primitive de $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$.
- $x \mapsto \ln(|u(x)|)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.
- $x \mapsto \dfrac{u(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ est une primitive de $x \mapsto u'(x)u(x)^{\alpha}$.

- $x \mapsto \sin(u(x))$ est une primitive de $x \mapsto u'(x)\cos(u(x))$.
- $x \mapsto -\cos(u(x))$ est une primitive de $x \mapsto u'(x)\sin(u(x))$.

Exemples.

- Primitives (sur $\mathbb{R}$) de $x \mapsto \dfrac{x^2}{2} - 3x + 2$: ce sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{3x^2}{2} + 2x + C$, avec C constante réelle.
- Primitives sur $]0, +\infty[$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x}$. On a
$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{x}.$$
Les primitives de f sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{x^2}{2} - 2x + \ln(x) + C$.

- Primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{5x}{x^2+1}$. On a $g(x) = \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{2x}{x^2+1} = \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, où $u(x) = x^2+1$. Les primitives de g sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{5}{2}\ln(x^2+1) + C$
- Primitives (sur $\mathbb{R}$) de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{1}{1+4x^2}$. On a

$$h(x) = \frac{1}{1+(2x)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1+(2x)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{u'(x)}{1+u(x)^2} = \frac{1}{2} u'(x) \arctan'(u(x)),$$

avec $u(x) = 2x$. Les primitives de h sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{2}\arctan(2x) + C$.

- Primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $k : x \mapsto (\cos x)e^{-\sin x}$. On a

$$(\cos x)e^{-\sin x} = -u'(x)e^{u(x)}, \quad \text{avec } u(x) = -\sin x.$$

Donc les primitives de k sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto -e^{-\sin x} + C$.

- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant ni -1, ni 0, ni 1. On considère la fonction ℓ définie sur I par $\ell(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{(x^3 - x)^4}$. On a

$$\ell(x) = \frac{u'(x)}{u(x)^4} = u'(x)u(x)^{-4}\,, \quad \text{avec } u(x) = x^3 - x$$

Les primitives de ℓ sur I sont les fonctions

$$x \mapsto \frac{u(x)^{-4+1}}{-4+1} + C = -\frac{u(x)^{-3}}{3} + C\,,$$

c'est-à-dire les fonctions $\quad x \mapsto -\dfrac{1}{3(x^3 - x)^3} + C$.