UAPV - UFR STS Année 2018/2019
Portails Math-Info/Math-Physique L1 S1 Analyse 1

Corrigé du CC1

Exercice 1.

a)

x	-3		-2		0		1
$f(x)$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4

b) f étant strictement décroissante sur $[-1, 0]$, pour tout $x \in]-1, 0]$, $f(0) \leq f(x) < f(-1)$, c'est-à-dire $0 \leq f(x) < 2$.

f étant strictement croissante sur $[0, 1/2]$, pour tout $x \in [0, 1/2[$, $f(0) \leq f(x) < f(1/2)$, ce qui donne $0 \leq f(x) < f(1/2)$, avec $f(1/2) < 2$.

Finalement, $0 \leq f(x) < 2$ pour tout $x \in]-1, 1/2[$.

c) On voit sur le dessin que $f(0) = 0$, $f(1) = 4$ et $f(-1) = 2$:
$f(0) = 0$ donne $d = 0$;
$f(1) = 4$ donne $1 + b + c + d = 4$, d'où $b + c = 3 - d = 3$;
$f(-1) = 2$ donne $-1 + b - c + d = 2$, d'où $b - c = 3 - d = 3$.
Finalement, de $b + c = 3$ et $b - c = 3$ on tire $b = 3$ et $c = 0$: $f(x) = x^3 + 3x^2$.
On pourrait aussi voir sur le graphe que $f'(0) = 0$, ce qui donne directement $c = 0$.

Exercice 2. a) D est l'ensemble des nombres réels x tels que $(x^2 - 1)x \neq 0$. On a

$$(x^2 - 1)x \neq 0 \iff x^2 \neq 1 \text{ et } x \neq 0 \iff x \neq 1 \text{ et } x \neq -1 \text{ et } x \neq 0\,.$$

$D = \mathbb{R} \backslash \{-1, 0, 1\}$.

b) Les solutions de l'équation $x^2 + 2x - 3 = 0$ sont 1 et -3. On a $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$. D'autre part $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$. Donc

$$F(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)x} = \frac{x+3}{(x+1)x}$$

c) i) $F(x) = \dfrac{x^2(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2})}{x^3(1 - \frac{1}{x^2})} = \dfrac{(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2})}{x(1 - \frac{1}{x^2})}$. Lorsque x tend vers $+\infty$, $1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^2}$ tend vers 1 et $x(1 - \dfrac{1}{x^2})$ tend vers $+\infty$. On a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$.

ii) En utilisant la simplification de b), on trouve

$$\lim_{x \to 1} F(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x+3}{(x+1)x} = \frac{4}{2} = 2\,.$$

Exercice 3. a) $D_g = \mathbb{R}^*$; g est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$, et $g'(x) = 6x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

b) $D_u = \mathbb{R} \backslash \{-\dfrac{1}{2}\}$; u est dérivable en tout point de D_u et

$$u'(x) = \frac{3x^2(2x+1) - 2x^3}{(2x+1)^2} = \frac{4x^3 + 3x^2}{(2x+1)^2}\,.$$

c) Pour tout réel x, $x^4+3 \geq 3 > 0$. La fonction racine carrée étant définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $D_v = \mathbb{R}$ et v est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$;

$$v'(x) = \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+3}} = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+3}}\,.$$

Exercice 4. On reconnaît la définition du nombre dérivé de la fonction cos en $\pi/4$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{4}+h)-\cos(\frac{\pi}{4})}{h} = \cos'(\frac{\pi}{4}) = -\sin(\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Exercice 5. a) On a :

$$\begin{array}{rcll} \forall t\in\mathbb{R}\,,\ f(-t) & = & \arccos(\cos(-2t)) & \\ & = & \arccos(\cos(2t)) & \text{car la fonction cos est paire} \\ & = & f(t) & \end{array}$$

Donc f est paire.

$$\begin{array}{rcll} \forall t\in\mathbb{R}\,,\ f(t+\pi) & = & \arccos(\cos(2t+2\pi)) & \\ & = & \arccos(\cos(2t)) & \text{car la fonction cos est } 2\pi\text{-périodique} \\ & = & f(t) & \end{array}$$

Donc f est périodique de période π.

b) D'après la définition de la fonction arccos comme bijection réciproque de $\cos_{|[0,\pi]} : [0,\pi] \to [-1,1]$, on a $\forall \theta \in [0,\pi]\,,\ \arccos(\cos\theta) = \theta$. Si $t\in[0,\pi/2]$, $2t\in[0,\pi]$ donc $f(t)=2t$.