Corrigé du CC1

Exercice 1. a) En utilisant l'équivalence (pour $r \geq 0$) $|a| > r \iff a > r$ ou $a < -r$, on trouve

$$|x-2| > 3 \iff x-2 > 3 \text{ ou } x-2 < -3 \iff x > 5 \text{ ou } x < -1\,.$$

L'ensemble cherché est $]-\infty, -1[\, \cup\,]5, +\infty[$.

b) Il faut d'abord avoir $x \geq 3$ pour que $\sqrt{x-3}$ soit défini. Comme la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a, pour $x \geq 3$, les équivalences suivantes.

$$\sqrt{x-3} \leq 3 \iff (\sqrt{x-3})^2 \leq 3^2 \iff x-3 \leq 9 \iff x \leq 12\,.$$

L'ensemble cherché est $[3, 12]$.

Exercice 2. a) $f(x)$ est défini si $(x-2)x^2 \neq 0$, c'est-à-dire si $x \neq 0$ et $x \neq 2$: l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}\backslash\{0, 2\}$

b) On a

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3(1-\frac{8}{x^3})}{x^3(1-\frac{2}{x})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{8}{x^3}}{1-\frac{2}{x}} = 1\,.$$

On a $\lim_{x\to 0} x^3 - 8 = -8$ et $\lim_{x\to 0, x\neq 0} (x-2)x^2 = 0_-$ ("0_-" signifie que lorsque x tend vers 0, $(x-2)x^2$ tend vers 0 en restant négatif). Donc $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

c) Posons $P(x) = x^3 - 8$; $P(2) = 0$ donc $P(x)$ se factorise par $(x-2)$: $x^3 - 2 = (x-2)(x^2 + ax + b)$. En développant $(x-2)(x^2+ax+b)$, et en identifiant les coefficients, on trouve $a = 2$ et $b = 4$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{0, 2\}$,

$$f(x) = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)x^2} = \frac{(x^2+2x+4)}{x^2}\,.$$

Donc

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{(x^2+2x+4)}{x^2} = \frac{12}{4} = 3\,.$$

Exercice 3. a) $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g =]-\infty, 1]$ ($g(x)$ est défini si $1 - x \geq 0$, c'est-à-dire si $x \leq 1$).

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x/2) \leq 1$ dont $g(\sin(x/2))$ est bien défini. L'ensemble de définition de $g \circ f$ est $\mathbb{R}$. De plus $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ f(x + 4\pi) = \sin(\frac{x+4\pi}{2}) = \sin(\frac{x}{2} + 2\pi) = \sin(\frac{x}{2})$, car la fonction sinus est 2π-périodique. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ (g\circ f)(x+4\pi) = g(f(x+4\pi)) = g(f(x)) = (g\circ f)(x)\,.$$

La fonction $g \circ f$ est donc 4π-périodique.

Exercice 4. 1 a) On a

$$\cos(2a) = \cos(a+a) = (\cos a)^2 - (\sin a)^2 = (\cos a)^2 - (1-(\cos a)^2) = 2(\cos a)^2 - 1\,.$$

b) Pour $x \in [-1,1]$, d'après a),

$$\cos(2\arccos(x)) = 2(\cos(\arccos(x)))^2 - 1 = 2x^2 - 1$$

car, par définition de $\arccos(x)$, $\begin{cases} \cos(\arccos(x)) = 1 \\ \arccos(x) \in [0,\pi] \end{cases}$

2. La condition est : $x \in [0,\pi]$, car la fonction arccos est la bijection réciproque de $cos_{|[0,\pi]}$: $[0,\pi] \to [-1,1]$.

Exercice 5. a) $f(x) = u(x)^3$, avec $u(x) = \sqrt{x}+1$, f est continue sur $[0,+\infty[$, dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$f'(x) = 3u(x)^2u'(x) = 3(\sqrt{x}+1)^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3(\sqrt{x}+1)^2}{2\sqrt{x}}$$

$\forall x \in]0,+\infty[\,,\ f'(x) > 0$ dont f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

b) $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 2 - x^2$ et $v(x) = x - 1$; f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{(-2x)(x-1) - (2-x^2)}{(x-1)^2} = \frac{-x^2+2x-2}{(x-1)^2}\,.$$

La fonction $x \to -x^2+2x-2$ est une fonction polynomiale de degré 2, de discriminant -4, donc cette fonction est de signe constant négatif. Par ailleurs $(x-1)^2 > 0$ sur $]1,+\infty[$, donc

$$\forall x \in]1,+\infty[\,,\ f'(x) < 0$$

La fonction f est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$.