

CC2

Documents, calculatrices et portables interdits. Les réponses doivent être accompagnées d'une justification.

Durée : 1h

Exercice 1. On définit la fonction $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln(x) + \frac{2}{x}.$$

On rappelle que $x_0 \in]0, +\infty[$ est un point critique de f si $f'(x_0) = 0$.

- Calculer $f'(x)$ et déterminer le(s) point(s) critique(s) de f .
- Déterminer les limites de f en 0 (à droite) et en $+\infty$.
- Dresser le tableau de variation de f .
- La fonction f admet-elle un minimum global? un maximum global? Si oui, dire où cet extremum est atteint.

Exercice 2. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $2^x > e^{x^2}$ (où $e^{x^2} = \exp(x^2)$).

Exercice 3. On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = (1 + \cos x)^2$.

- Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$; on rappelle que g'' désigne la dérivée seconde de g .
- Ecrire la formule de Taylor-Young en 0 à l'ordre 2 pour la fonction g .
- En déduire la limite de $\frac{g(x) - 4}{x^2}$ lorsque x tend vers 0.

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes.

$$\text{a) } I = \int_1^4 (t-2)^2 + t^3 dt \quad \text{b) } J = \int_0^{\pi/2} \cos(3x) dx \quad \text{c) } K = \int_0^2 s\sqrt{s^2+1} ds$$