UAPV - UFR STS | Année 2022/2023
Portails Math-Info/Math-Physique L1 S1 | Analyse 1

TD1

Exercice 1. Déterminer (sous la forme d'intervalles ou de réunions d'intervalles) les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ définis par les conditions suivantes sur x :

$a)$ $5x+2 \geq -3$ $b)$ $2x-1 < 4x+3 \leq -x+6$ $c)$ $|x-1| < 4$ $d)$ $|x-2| \geq 3$

$e)$ $|x-2| \leq |x|$ $f)$ $|x-2|+|x+2| > 3$ $g)$ $\sqrt{x+1} < 2$ $h)$ $x^2+1 \leq 3$

$i)$ $x^2+3x < 4$ $j)$ $x^3-3x^2+2x \geq 0$ $k)$ $|x|+|x-1| \leq 2$

Exercice 2. Soit $f : x \mapsto ax+b$ une fonction affine. On suppose que $|f(-1)| = 3$ et $|f(2)| = 2$. Déterminer toutes les valeurs possibles du couple (a,b) et tracer les courbes représentatives correspondantes de f.

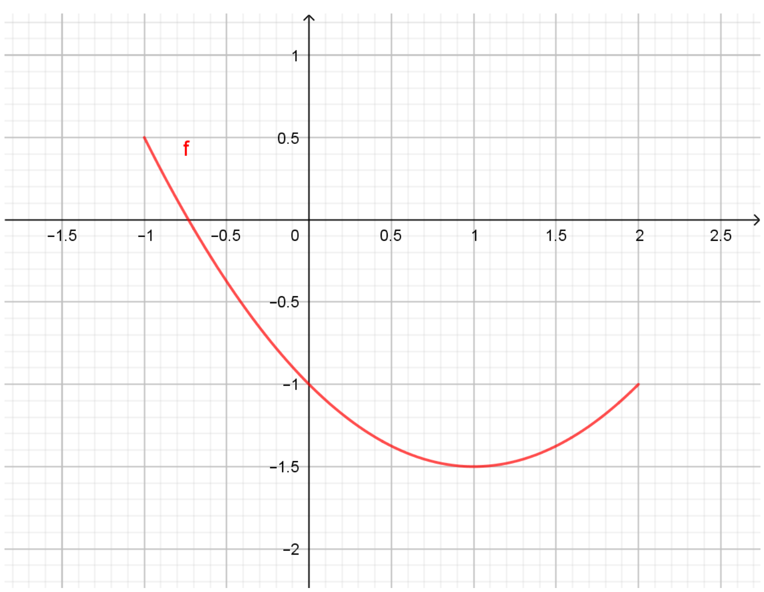
Exercice 3. a) Tracer la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto |x|+|2x-4|$.

b) A quoi est égal l'ensemble $f(\mathbb{R})$? La fonction f est-elle minorée? Est-elle majorée?

c) Déterminer l'ensemble $f([-2,3[)$.

d) Déterminer tous les antécédents par f de 1; de 2; de 3.

Exercice 4. On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f d'ensemble de définition $[-1,2]$.



a) Donner l'ensemble de définition et tracer la courbe représentative des fonctions suivantes :

$$i)\ x \mapsto -f(x) \qquad ii)\ x \mapsto f(-x) \qquad iii)\ x \mapsto f(x)+2 \qquad iv)\ x \mapsto f(x+2)$$

b) Sachant que f est la restriction à $[-1,2]$ d'une fonction polynomiale de degré 2, expliciter $f(x)$.

Exercice 5. Déterminer les ensembles de définition de f, g, $g \circ f$, $f \circ g$ et calculer $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$ dans chacun des exemples suivants.

a) $f : x \mapsto x^2 + 2$, $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$;

b) $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$, $g : x \mapsto x^2 - 1$.

Exercice 6. a) Soit f, g, h, des fonctions d'ensemble de définition $\mathbb{R}$. Montrer l'égalité $(f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h$.

b) Peut-on affirmer qu'on a aussi $h \circ (f+g) = h \circ f + h \circ g$? En cas de réponse négative, donner un contre-exemple.

Exercice 7. a) On considère une fonction paire $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction impaire $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et on pose $f = u + v$. Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, une expression de $u(x)$ et $v(x)$ en fonction de $f(x)$ et $f(-x)$.

b) Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, et que cette décomposition est unique.

c) Déterminer cette décomposition dans les cas suivants : $f(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^2 - 2x + 4$, $f(x) = \dfrac{1}{2 + \sin x}$.

Exercice 8. Donner l'ensemble de définition de la fonction $u : x \mapsto \sqrt{1 - x^3}$ et déterminer (sans calculer de dérivée!) son sens de variation.

Exercice 9. a) Pour $a \in [2,4]$, trouver un encadrement de a^2; de a^3; de $\dfrac{1}{a}$.

b) Pour $a \in [-3,2]$, que peut-on dire de a^2; de a^3; de $\dfrac{1}{a}$?

On pourra utiliser les tableaux de variations des fonctions carré, cube et inverse pour justifier les réponses.

Exercice 10. Soit $a, b \in \mathbb{R}_+$. Comparer $\sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. Dans quels cas a-t-on égalité?

Exercice 11. Que peut-on dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est à la fois 3-périodique et 5-périodique?

Exercice 12. Justifier que les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ sont périodiques et en donner une période.

$i)\ x \mapsto \sin(3x) \qquad ii)\ x \mapsto [\cos(\pi x)]^2 \sin(\pi x/2) \qquad iii)\ x \mapsto \cos(x/2) + \cos(x/3) + \cos(x/5)$

Exercice 13. Donner l'ensemble de définition des fonctions rationnelles suivantes, puis simplifier leur expression (si c'est possible).

$$a)\ x \mapsto \frac{x+x^7}{x^4-2x^5+3x^6} \qquad b)\ x \mapsto \frac{x^3-2x+1}{x^3-2x^2-x+2} \qquad c)\ x \mapsto \frac{x^3+2x}{x^4+4x^2+4}$$

Exercice 14. i) Déterminer tous les antécédents de $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ par la fonction cosinus.

ii) Déterminer tous les antécédents de $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ par la fonction sinus.

Exercice 15. Calculer les limites suivantes.

$$a)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x-2}{x^3-1} \qquad b)\ \lim_{x\to 0} \frac{x^3-x^2+x}{3x^3+2x} \qquad c)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-x^2+x}{3x^3+2x}$$

$$d)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-5x+7}{3x+1} \qquad e)\ \lim_{t\to 3} \frac{t-3}{t^2-9} \qquad f)\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x}-x$$

$$g)\ \lim_{t\to 2} \frac{1}{t^2-2t} \qquad h)\ \lim_{x\to 1, x>1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x-1}} \qquad i)\ \lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x^2+x}{x^2-3x+2} \qquad j)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^3+x^2}-x}{x^2}$$

Exercice 16. a) On considère une fonction f dont l'ensemble de définition contient un intervalle $[a,+\infty[$. On suppose que la fonction $x \mapsto f(x)+x$ est bornée sur l'intervalle $[a,+\infty[$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

b) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Exercice 17. Résoudre les équations suivantes.

$$\text{a) } \sqrt{2x+3} = x \qquad \text{b) } \sqrt{x} = x-1 \qquad \text{c) } x^{\frac{1}{3}} = 3x \qquad \text{d) } \sqrt{x} - 2x^{\frac{1}{4}} = 1$$

Exercice 18. a) En utilisant les formules qui expriment $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$ en fonction de $\cos a$, $\sin a$, $\cos b$, $\sin b$, trouver une expression de $\cos(3a)$ et de $\sin(3a)$ en fonction de $\cos a$ et $\sin a$.

En déduire que

$$\cos(3a) = 4(\cos a)^3 - 3\cos a \qquad \text{et} \qquad \sin(3a) = 3\sin a - 4(\sin a)^3\,.$$

b) Trouver une simplification de $\cos(3\arccos(x))$ et de $\sin(3\arcsin(x))$ pour $x \in [-1,1]$.

Exercice 19. Combien l'équation $\tan x = 2$ a-t-elle de solutions dans l'intervalle $[-3\pi/2, 3\pi/2]$? Exprimer ces solutions en fonction du réel $\alpha := \arctan(2)$.

Exercice 20. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \arccos(\cos(2t))$.
a) Montrer que f est paire, et π-périodique.
b) Pour $t \in [0, \pi/2]$, simplifier $f(t)$ (justifier la réponse).
c) Tracer la courbe représentative de f.
Indication. Utiliser b) pour tracer la courbe représentative restreinte à l'intervalle $[0, \pi/2]$. *Utiliser ensuite a) pour obtenir la courbe représentative restreinte à* $[-\pi/2, \pi/2]$, *puis la courbe représentative entière.*

Exercices complémentaires

Exercice 21. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.
a) Quel est l'ensemble de définition de f?
b) Quel est l'ensemble de définition de $f \circ f$? Calculer $f \circ f(x)$.
c) Quel est l'ensemble de définition de $f \circ f \circ f$? Calculer $f \circ f \circ f(x)$.

Exercice 22. a) Factoriser la fonction polynomiale $x \mapsto P(x) = x^3 - 3x^2 + x$.
b) Factoriser la fonction polynomiale $x \mapsto Q(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$.
c) Quel est l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt{2x^3 - x^2 - 2x + 1}$?

Exercice 23. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{x}$.

Exercice 24. Tracer la courbe représentative de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty, 1[\,,\ f(x) = 2x + 3 \\ \forall x \in [1, 2[\,,\ f(x) = -x + 6 \\ \forall x \in [2, +\infty[\,,\ f(x) = 2\sqrt{x-1} \end{cases}$$

En quels points la fonction f est-elle continue?

Exercice 25. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

a) Tracer la courbe représentative de f. Vérifier que f est continue et strictement croissante. Etudier ses limites en $+\infty$ et $-\infty$. En déduire que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
b) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 26. Simplifier, pour tout $x \in [-1, 1]$, $\cos(\arcsin(x))$, $\sin(\arccos(x))$, $\sin(2\arccos(x))$.