Université d'Avignon – Faculté des Sciences Année 2018-2019
L1S2 Analyse 2

CONTROLE CONTINU 1

Durée : 1h. Tous documents, calculatrices (sauf type collège) et téléphones interdits. La note tiendra compte de la rédaction.

Exercice 1.
1) Donner un exemple de suite arithmétique (non constante), définie par récurrence.
2) Appeler (u_n) la suite que vous avez donnée en 1) :
2-1) La suite (u_n) est-elle monotone ? Si oui, donner son sens de variation.
2-2) la suite (u_n) est-elle bornée ? Justifier.

Exercice 2. Soit la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$.
1) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.
2) Exprimer explicitement le terme général de la suite (u_n) à l'aide de n. (*On pourra retrouver la formule, ce qui sera valorisé hors barème, ou donner la formule sans justifier.*)

Exercice 3. On considère la suite de terme général, pour $n \geq 1$:

$$u_n = \Pi_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{2.k^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2.1^2}\right)\left(1 - \frac{1}{2.2^2}\right)...\left(1 - \frac{1}{2.n^2}\right) .$$

1) Justifier que l'on peut considérer la suite des quotients successifs $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
2) Simplifier $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et déterminer, si possible, le sens de variation de (u_n). Justifier.

Exercice 4. On considère la suite (v_n) vérifiant la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$\forall n \geq 0, v_{n+2} = 2v_{n+1} + 3v_n .$$

1) Déterminer les solutions de l'équation $x^2 - 2x - 3 = 0$, que l'on notera dans la suite r, s avec $r \leq s$.
2) Soit, pour $n \geq 0$, $s_n = v_{n+1} - rv_n$. *On sait que* (s_n) est une suite géométrique de raison s. En déduire s_n à l'aide de v_0, v_1 et n. .
3) Soit, pour $n \geq 0$, $t_n = v_{n+1} - sv_n$. *On sait que* (t_n) est une suite géométrique de raison r. En déduire t_n à l'aide de v_0, v_1 et n. .
4) Montrer (par la méthode de votre choix) que $\forall n \geq 0$

$$v_n = \left(\frac{v_1 + v_0}{4}\right) 3^n + \left(\frac{v_1 - 3v_0}{4}\right)(-1)^{n+1} .$$

5) **Question hors barème**
Soit une suite réelle (u_n) vérifiant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n + 4(-1)^n$.
5-1) Montrer qu'il existe un réel α, que l'on déterminera, tel que la suite (w_n) définie pour $n \geq 0$ par $w_n = \alpha n(-1)^n$ vérifie la relation de récurrence précédente.
5-2) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in N}$, $v_n = u_n - w_n$, vérifie une relation linéaire de récurrence d'ordre 2.
5-3) A l'aide de la question 4), déterminer u_n à l'aide de v_0, v_1 et n.