Université d'Avignon – Faculté des Sciences Année 2018-2019
L1S2 Analyse 2

CONTROLE CONTINU 3

Durée : 1h. Tous documents, calculatrices (sauf type collège) et téléphones interdits. La note tiendra compte de la rédaction.

Exercice 1. Soit la suite définie par $u_0 > 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n}$.
1) Calculer u_1 à l'aide de u_0, ainsi que u_{n+2} à l'aide de u_n pour $n \in \mathbb{N}$.
2) En déduire les suites extraites des termes de rang pair et impair à l'aide de u_0.
3) u_0 étant strictement positif, pour quelle(s) valeur(s) de u_0, (u_n) converge ? Justifier.

Exercice 2. On considère la suite de terme général $u_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right) + \dfrac{2}{n}$.
1) Construire trois suites extraites de (u_n) : une qui converge vers 0, une qui converge vers 1 et une qui converge vers -1.
2) La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.

Exercice 3.
1) On rappelle que si $u_n \to 0$ alors $e^{u_n} - 1 \sim u_n$.
1-1) Donner un équivalent de $n^3(e^{\frac{2}{n}} - 1)$.
1-2) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3(e^{\frac{2}{n}} - 1)}{1+n^2}$.
2) Soit (u_n) une suite satisfaisant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(1 + \frac{\ln n}{n^2}\right) n^3 \leq u_n \leq \frac{3}{1+e^{-n}} n^3 .$$

2-1) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq 1 + \dfrac{\ln n}{n^2}$ et $\dfrac{3}{1+e^{-n}} \leq 3$. En déduire que $u_n = \mathcal{O}(n^3)$.
2-2) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \dfrac{3}{1+e^{-n}} n^3$. Montrer que $u_n \sim 3n^3$.
2-3) Montrer que $\dfrac{\ln n}{n^2} = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Barème indicatif : Ex 1 : 6(=2+2+2), Ex 2 : 7,5(= 6+1,5) Ex 3 : 8(=2,5 +5,5)