L1S2 Analyse2
Plan détaillé du cours. Année 2021-2022

SUITES DE NOMBRES REELS
C 4 : Etude asymptotique des suites.

On ne dispose jusqu'à présent que d'un seul outil permettant de comparer deux suites réelles : celui fourni par les inégalités.

Dans ce chapitre, il s'agit d'introduire d'autres relations de comparaison : **la négligeabilité, la dominance et l'équivalence**. Elle permettent de mieux comprendre le comportement de (u_n) lorsque n devient grand : on parle alors d'**étude asymptotique de la suite.**

1 Suite négligeable devant une autre/ dominée par une autre

1.1 Suite négligeable

Définition 1. La suite (a_n) est **négligeable** devant (b_n) ou (b_n) est **prépondérante** devant (a_n) et on écrit $a_n = o(b_n)$, s'il existe une suite (ϵ_n) qui converge vers 0 telle que $a_n = \epsilon_n b_n$ à partir d'un certain rang. *On lit " (a_n) est un petit o de (b_n) ".*

Remarque

1. L'écriture $w_n = v_n + o(u_n)$ signifie que $w_n - v_n = o(u_n)$.

2. On place le $o(u_n)$ en dernière position : on évitera d'écrire $w_n = o(u_n) + v_n$.

Pour montrer qu'une suite est négligeable devant une autre, on utilise très souvent le résultat suivant : soient (u_n) et (v_n) deux suites telles qu'**à partir d'un certain rang $v_n \neq 0$** alors :

$$u_n = o(v_n) \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \to 0\,.$$

! $a_n = o(u_n)$ et $b_n = o(u_n)$ ne signifie pas que les suites (a_n) et (b_n) sont égales.

Il faut bien comprendre qu'on désigne par le même symbole $o(u_n)$ *n'importe quelle suite* négligeable devant (u_n).

1.2 Suite dominée

Définition 2. La suite (a_n) est **dominée** par (b_n) ou (b_n) **domine** (a_n) et on écrit $a_n = \mathcal{O}(b_n)$, s'il existe une suite bornée (M_n), telle que l'on ait l'égalité $a_n = M_n b_n$ à partir d'un certain rang ; autrement dit si $\exists M > 0, \exists n_0, \forall n \geqslant n_0, |a_n| \leqslant M|b_n|$. *On lit " (a_n) est un grand O de (b_n) ".*

Remarque

1. Les notations $\mathcal{O}$ (grand O) et o (petit o) sont appelées *notations de Landau* (la lettre O est l'initiale de l'expression "ordre de grandeur").
2. Tout comme $o(u_n)$ désigne une suite quelconque négligeable devant (u_n), $\mathcal{O}(u_n)$ désigne une suite quelconque dominée par (u_n).

Pour montrer qu'une suite est dominée par une autre, on utilise très souvent le résultat suivant : soient (u_n) et (v_n) deux suites telles qu'**à partir d'un certain rang $v_n \neq 0$** alors :

$$u_n = \mathcal{O}(v_n) \Leftrightarrow \left(\frac{u_n}{v_n}\right) \text{ suite bornée.}$$

Cas particuliers.

• $o(1)$ désigne une suite qui tend vers 0 : $a_n = o(1) \Longleftrightarrow \lim_n a_n = 0$.
• Plus généralement, $a_n = l + o(1) \Longleftrightarrow \lim_n a_n = l$.
• $\mathcal{O}(1)$ désigne une suite bornée : $a_n = \mathcal{O}(1) \Longleftrightarrow \exists M > 0, \forall n, |a_n| \leqslant M$.

1.3 Propriétés

Propriétés.

1. $a_n = o(b_n) \Longrightarrow a_n = \mathcal{O}(b_n)$.
2. $a_n = o(b_n), b_n = \mathcal{O}(c_n) \Longrightarrow a_n = o(c_n)$.
3. Si $a_n = o(u_n)$ et $b_n = o(u_n)$, alors $a_n + b_n = o(u_n)$.
4. Si $a_n = o(u_n)$ et $b_n = \mathcal{O}(v_n)$, alors $a_n b_n = o(u_n v_n)$.
5. Si $a_n = \mathcal{O}(u_n)$ et $b_n = \mathcal{O}(u_n)$, alors $a_n + b_n = \mathcal{O}(u_n)$.
6. Si $a_n = \mathcal{O}(u_n)$ et $b_n = \mathcal{O}(v_n)$, alors $a_n b_n = \mathcal{O}(u_n v_n)$.

La notion de négligeabilité permet notamment de comparer deux suites (u_n) et (v_n) qui convergent toutes les deux vers 0 ou qui tendent toutes les deux vers un infini. Dans ce cas, la recherche de la limite de $\frac{u_n}{v_n}$ aboutit *a priori* à une forme indéterminée $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. La connaissance des relations de négligeabilité suivantes permettra de lever un certain nombre de ces formes indéterminées.

Théorème 1. *Soient a, b, α et β des nombres réels.*
— *Si $\alpha < \beta$, alors $n^\alpha = o(n^\beta)$.*
— *Si $0 < a < b$, alors $a^n = o(b^n)$.*
— *Si $\alpha > 0$, alors $(\ln n)^\beta = o(n^\alpha)$.*
— *Si $a > 1$, alors $n^\alpha = o(a^n)$. En particulier $n^\alpha = o(e^n)$.*
— *On a $a^n = o(n!)$.*

2 Suites équivalentes

2.1 Définition et premières propriétés.

Définition 3. Les suites (a_n) et (b_n) sont *équivalentes* (au voisinage de $+\infty$), et on écrit $a_n \sim b_n$, s'il existe une suite (ϵ_n) telle que :

1. $\lim_n \epsilon_n = 0$
2. $a_n = b_n(1 + \epsilon_n)$ à partir d'un certain rang.

L'équivalence de suites définit une relation d'équivalence (relation réflexive, symétrique et transitive).

! $a_n \sim 0$ signifie que la suite (a_n) est nulle à partir d'un certain rang. L'écriture $a_n \sim +\infty$ n'a aucun sens !

Pour montrer qu'une suite est négligeable devant une autre, on utilise souvent les résultats suivant :

1. $u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n - v_n = o(u_n) \Leftrightarrow u_n - v_n = o(v_n)$.
2. soient (u_n) et (v_n) deux suites telles qu'**à partir d'un certain rang $v_n \neq 0$** alors :
$$u_n \sim v_n \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \to 1\,.$$

Equivalence et limite

On note ici encore $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Proposition 2. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.*
— *Si $u_n \sim v_n$ et si l'une des deux suites admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ alors l'autre suite admet la même limite,*
— *réciproque partielle : si les deux suites convergent vers une même limite* **finie non nulle** *$l \in \mathbb{R}^*$, alors $u_n \sim v_n$.*

! La réciproque est fausse lorsque $l \in \{0, +\infty, -\infty\}$.

Equivalence et négligeabilité

Proposition 3. *Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles.*
— *Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n + v_n \sim v_n$.*

— *Si* $u_n = o(v_n)$ *et* $v_n \sim w_n$ *alors* $u_n = o(w_n)$.
— *Si* $u_n = o(v_n)$ *et* $u_n \sim w_n$ *alors* $w_n = o(v_n)$.

Equivalence et opérations algébriques

Proposition 4. *Soient* (u_n), (v_n), (w_n) *et* (t_n) *quatres suites réelles.*
On suppose que $u_n \sim v_n$ *et* $w_n \sim t_n$. *Alors :*
— $u_n w_n \sim v_n t_n$,
— *si à partir d'un certain rang* $w_n \neq 0$ *et* $t_n \neq 0$, *alors* $\frac{1}{w_n} \sim \frac{1}{t_n}$ *et* $\frac{u_n}{w_n} \sim \frac{v_n}{t_n}$.

! L'équivalence n'est pas compatible avec l'addition et la soustraction.

Equivalence et composition
! En règle générale, on ne peut pas composer des équivalents : si $u_n \sim v_n$ et si f est une fonction quelconque, on n'aura pas *a priori* $f(u_n) \sim f(v_n)$.
Il existe néanmoins quelques exceptions :

Proposition 5. *Supposons* $u_n \sim v_n$ *alors :*
— $|u_n| \sim |v_n|$,
— *pour tout* $k \in \mathbb{N}$, $u_n^k \sim v_n^k$,
— *si à partir d'un certain rang* $u_n > 0$ *et* $v_n > 0$ *alors pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$.

! *Dans la proposition précédente,* k *et* α *sont des constantes indépendantes de* n.

2.2 Equivalents usuels

Proposition 6. *Si* $a_q \neq 0$ *alors* $a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + ... + a_q n^q \sim a_q n^q$.

Théorème 7. Supposons $u_n \to 0$ *alors :*

$$\bullet \sin u_n \sim u_n \quad \bullet 1 - \cos u_n \sim \frac{u_n^2}{2} \quad \bullet \ln(1+u_n) \sim u_n$$
$$\bullet \tan u_n \sim u_n \quad \bullet e^{u_n} - 1 \sim u_n \quad \bullet \forall \alpha \in \mathbb{R}, (1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$$

• Si (v_n) est une suite réels strictement positifs convergeant vers 1, alors

$$\ln(v_n) \sim v_n - 1 \qquad \text{et} \qquad v_n^\alpha - 1 \sim \alpha(v_n - 1).$$

2.3 Méthodes pour déterminer des équivalents

En général, on ne peut pas composer une relation d'équivalence :
$f(u_n) \sim v_n \not\Rightarrow g(f(u_n)) \sim g(v_n)$.
Supposons qu'on cherche à déterminer un équivalent de $(g \circ f)(u_n)$ à l'aide des équivalents usuels.
On commencera par utiliser l'équivalent usuel associé à la fonction g, puis celui associé à la fonction f .