Ce document est un exemple de corrigé du sujet du groupement 2 proposé le 10 avril 2018 au concours de professeur des écoles, il ne s'agit pas d'un corrigé officiel.

1

PREMIÈRE PARTIE

PARTIE A

Volume de la canette classique de rayon 3,3 cm et de hauteur 9,8 cm :
$\mathcal{V}_c = \pi \times (3,3 \text{ cm})^2 \times 9,8 \text{ cm} \approx 335 \text{ cm}^3 \approx 0,335 \text{ dm}^3 \approx 0,335 \text{ L} \approx 33,5 \text{ cL}$.
Or, 33,5 cL > 33 cL donc, $\boxed{\text{le volume de cette canette est supérieur à 33 cL.}}$

PARTIE B

Une contenance de 33 cL = 0,33 L correspond à un volume de 0,33 dm^3 = 330 cm^3.
Volume de la canette slim de rayon 2,8 cm et de hauteur h en cm :

$$\mathcal{V}_s = \pi \times (2,8 \text{ cm})^2 \times h \text{ cm} \geq 330 \text{ cm}^3 \iff h \geq \frac{330 \text{ cm}^3}{\pi \times 7,84 \text{ cm}^2} \iff h \geq 13,39 \text{ cm}.$$

$\boxed{\text{Pour avoir un volume au moins égal à 33 cL, la hauteur doit être au moins égale à 13,4 cm.}}$

PARTIE C

Dans toutes cette partie, les mesures de longueur sont exprimées en centimètre et les mesures d'aire en centimètre carré.

1. $\mathcal{V} = \pi \times r^2 \times h = 330 \iff \boxed{h = \dfrac{330}{\pi r^2}.}$
2. La longueur L du rectangle correspond au périmètre du disque de rayon r donc : $\boxed{L = 2\pi r.}$
3. $\mathcal{A} = L \times h = 2\pi r \times \dfrac{330}{\pi r^2} = \boxed{\dfrac{660}{r}.}$
4. L'aire totale du patron est la somme de l'aire du rectangle et des deux disques : $\boxed{\mathcal{A}_T = \dfrac{660}{r} + 2\pi r^2.}$

PARTIE D

1. Pour l'abscisse $r = 1,5$ cm, on lit une aire environ égale à $\boxed{450 \text{ cm}^2.}$
2. Pour une ordonnée $\mathcal{A} = 300$ cm^2, on lit deux valeurs pour le rayon : $\boxed{r_1 \approx 2,5 \text{ cm et } r_2 \approx 5,25 \text{ cm.}}$
3. Pour une canette classique de rayon 3,3 cm, on lit une aire d'environ 270 cm^2 et pour une canette slim de rayon 2,8 cm, on lit une aire d'environ 285 cm^2. donc, $\boxed{\text{c'est la canette classique qui demande le moins de surface de métal.}}$
4. La surface minimale est atteinte pour un rayon d'environ $\boxed{\text{3,75 cm.}}$

PARTIE E

1. Dans `B2`, on peut écrire : `=2*PI()*B1∧2+660/B1`
2. Les valeurs minimales pour l'aire dans le tableau sont 264,40 et 264,41, elles correspondent à un rayon compris entre 3,7 cm et 3,8 cm.
3. Pour $r = 3,7$, d'après la question C1, on a $h = \dfrac{330}{\pi \times 3,7^2} \approx 7,67$.

   Une canette de 33 cL de rayon 3,7 cm a pour hauteur 7,7 cm environ.

PARTIE F

1. — Calcul du volume d'aluminium nécessaire pour fabriquer le corps de la canette :
   $130\,\mu\text{m} = 130 \times 10^{-6}$ m $= 130 \times 10^{-4}$ cm $= 0,013$ cm.
   $\mathcal{V} = \text{surface} \times \text{épaisseur} = 268,42 \text{ cm}^2 \times 0,013 \text{ cm} \approx 3,49 \text{ cm}^3$.

   — Calcul de la masse d'aluminium nécéssaire pour fabrique le corps de la canette :
   la masse volumique de l'aluminium vaut $\mu = \dfrac{2\,700 \text{ kg}}{1 \text{ m}^3} = \dfrac{2\,700\,000 \text{ g}}{1\,000\,000 \text{ cm}^3} = 2,7 \text{ g/cm}^3$.
   Un volume de 3,49 cm^3 d'aluminium a une masse m en gramme égale à $3,49 \times 2,7 \approx 9,423$.

   — Calcul de la masse totale d'aluminium nécéssaire pour la canette entière :
   M = masse du corps + masse de l'anneau + masse de soudure
   $M \approx$ 9,4 g + 1,4 g + 1,9 g $\approx$ 12,7 g.
   Il faut environ 12,7 g d'aluminium pour fabriquer une canette classique.

2. Pour un vélo de 9 kg, soit 9 000 g, on effectue le calcul suivant :
   9 000 g ÷ 12,7 g ≈ 708,66.
   Il faudrait environ 709 canettes classiques pour fabriquer ce type de vélo.

2

DEUXIÈME PARTIE (13 points)

EXERCICE 1

Dans cet exercice, la personne est choisie au hasard, nous sommes donc dans une situation d'équiprobabilité.

1. Un donneur universel est un donneur de groupe O et de rhésus négatif. Or, cela concerne 6 % de

   la population française donc, la probabilité d'être donneur universel est de 0,06.
2. Un receveur universel est un receveur de groupe AB et de rhésus positif. Or, cela concerne 3 % de la population française donc, la probabilité d'être receveur universel est de 0,03.
3. Pour être donneur à une personne de groupe B et de rhésus positif, il faut être O+, O−, B+ ou B−, ce qui représente 36 % + 6 % + 9 % + 1 % soit 52 % de la population française donc,

   la probabilité de pouvoir donner a une personne de groupe B rhésus positif est de 0,52.
4. Parmi les personnes de groupe O, seules les personnes de rhésus négatif sont donneurs universels, ce qui représente du probabilité de $\dfrac{6\,\%}{36\,\%+6\,\%}=\dfrac{1}{7}\approx 0,143$.

   Pour une personne du groupe O, la probabilité d'être donneur universel est d'environ 0,14.
5. 43 217 325 personnes peuvent donner leur sang, et parmi elles, 6 % sont donneurs universels, soit $0,06\times 43\,217\,325$ personnes $=2\,593\,039,5$ personnes.

   Au 1er janvier 2016, il y avait environ 2 593 040 donneurs universels.
6. $\dfrac{43\,217\,325}{66\,627\,602}\times 100\approx 64,86$.

   Au 1er janvier 2016, environ 65 % de la population pouvait donner son sang.

EXERCICE 2

Pour aller de Nantes à Paris, l'hélicoptère se déplace vers l'est de 120 ce qui correspond à deux cases, donc une case correspond à un déplacement de 60. De la même manière, un déplacement vers le nord d'un case correspond à 60, les cases sont donc carrées. Donc, pour aller de Nantes à Lyon :

— il faut tout d'abord se déplacer de trois cases vers l'est, soit $3\times 60=180$;
— puis il faut s'orienter vers de sud, donc tourner à droite d'un angle de 90 ° ;
— enfin, il faut se déplacer vers le sud d'une case, soit de 60.

Pour aller de Nantes à Lyon, il faut remplacer les nombres 120, 270 et 60 par 180, 90 et 60.

EXERCICE 3

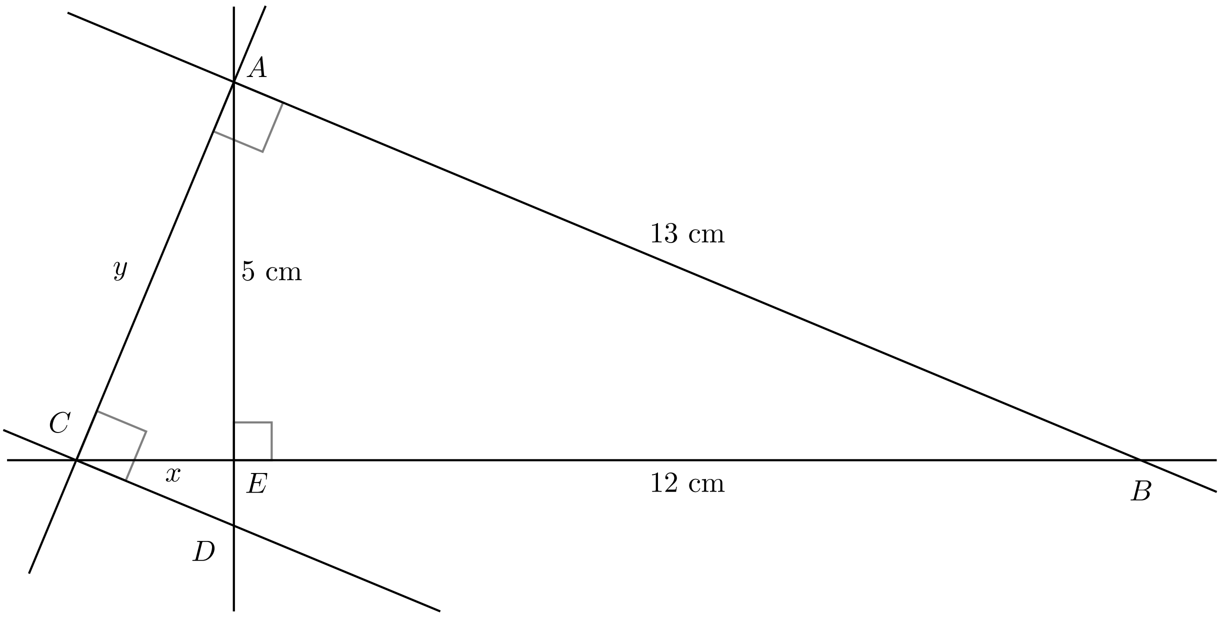
1. 45 est composé de 4 dizaines et de 5 unités.
   Étape 1 : on calcule $4\times 5=20$ ce qui correspond au nombre de centaines.
   Étape 2 : on écrit 25 à droite de 20.

   On a donc $45^2=2\,025$.
2. $n^2=(10d+5)^2=(10d)^2+2\times 10d\times 5+5^2=100d^2+100d+25=100d(d+1)+25$.

3. Le terme « $d(d+1)$ » correspond à la multiplication du nombre de dizaines d par l'entier qui le suit $(d+1)$. Le résultat obtenu est multiplié par 100 ce qui signifie que $d(d+1)$ est le nombre de centaines (étape 1) ; à ce nombre, on ajoute 25 qui est un nombre inférieur à 100 c'est la raison pour laquelle il suffit d'écrire 25 à droite du nombre de centaines pour obtenir le résultat (étape 2).
4. Un nombre décimal n' de partie décimale 5 peut s'écrire sous la forme de la fraction décimale $n' = \dfrac{n}{10}$ où n est un nombre entier qui se termine par 5.
   On a alors $n' = \dfrac{n^2}{100} = \dfrac{100d(d+1)+25}{100} = d(d+1) + 0,25$.
   Par analogie avec ce qui a été vu pour les entiers, il suffit donc de multiplier la partie entière par son successeur pour obtenir la partie entière et de prendre 25 comme partie décimale.
   Si on applique ce procédé à 3,5, on effectue le produit de 3 par 4 qui donne 12 (partie entière) et 25 est la partie décimale donc : $\boxed{3,5^2 = 12,25.}$

EXERCICE 4

1. Figure en vraie grandeur :



2. Dans toute la suite, les mesures sont exprimées en centimètre. Notons $x = CE$ et $y = AC$.
   — Dans le triangle ABE rectangle en E, on utilise le théorème de Pythagore :
   $AB^2 = AE^2 + EB^2 \iff EB^2 = 13^2 - 5^2 = 144$ donc $EB = 12$.
   — Dans le triangle ACE rectangle en E, on utilise le théorème de Pythagore :
   $AC^2 = AE^2 + EC^2 \iff y^2 = 5^2 + x^2. \qquad (1)$
   — Dans le triangle ABC rectangle en A, on utilise le théorème de Pythagore :
   $CB^2 = CA^2 + AB^2 \iff (x+12)^2 = y^2 + 13^2. \qquad (2)$

   D'après (1) et (2), on obtient $(x+12)^2 = 5^2 + x^2 + 13^2 \iff x^2 + 24x + 144 = 25 + x^2 + 169$
   $$\iff 24x = 50 \iff x = \frac{25}{12}.$$

   L'aire du triangle CEA en cm^2 vaut alors : $\mathcal{A} = \dfrac{\text{CE} \times \text{AE}}{2} = \dfrac{\frac{25}{12} \times 5}{2} = \dfrac{125}{24} \approx 5,208$.

   $\boxed{\text{L'aire du triangle } CEA \text{ vaut environ, 5,21 cm}^2.}$

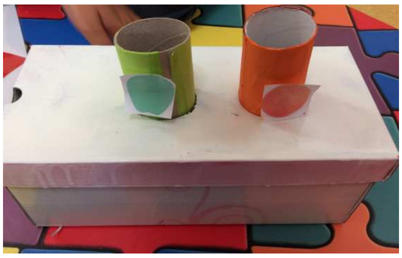
3

TROISIÈME PARTIE (14 points)

SITUATION 1 :

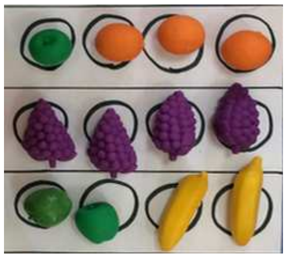
1. Un élève peut utiliser les procédures suivantes :
   — correspondance terme à terme avec une autre collection constituée de trois objets ;
   — perception visuelle globale de trois objets (ou subitisation) ;
   — comptage-dénombrement de la quantité : un et un (deux) et encore un ça fait trois.

2. On peut, par exemple, proposer les activités suivantes :
   — La salade de fruits (*atelier dirigé proposé par Marine V., PES, ESPE Réunion 2017-2018*).



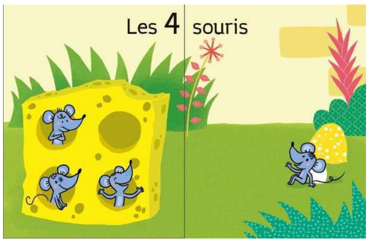
L'élève possède une boite opaque avec 2 ouvertures par lesquelles il doit mettre 4 fruits à choisir parmi des pommes ou des oranges ;

il ouvre la boite, puis les dénombre : par exemple « il y a une pomme et trois oranges, 1 et encore 3 ça fait 4 » ;

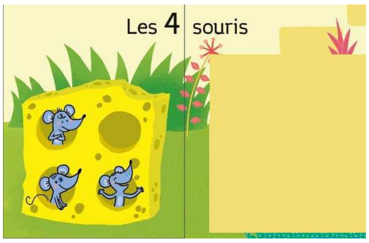


il dispose ses fruits dans la « maison du 4 ». Puis, il répète l'opération avec d'autres fruits.

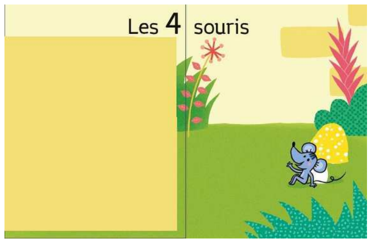
   — Les albums à calculer de *Rémi Brissaud, collection « J'apprends les maths », éditions Retz.* Il s'utilise progressivement et comporte trois types d'activité.



Dans l'image, il y a 4 souris : 3 sont dans des trous de gruyère disposés comme les points du dé. Une est dans l'herbe sur l'autre page. 3 et encore 1, ça fait 4.



Il y a 4 souris mais on ne les voit pas toutes. Combien y a-t-il de souris dans l'herbe sous le rabat ?



Il y a 4 souris mais on ne les voit pas toutes. Combien y a-t-il de souris dans le gruyère sous le rabat ?

3. On peut citer plusieurs intérêts :
   — travailler d'autres constellation moins classiques ;
   — travailler le lien entre les différentes représentations des nombres : pour passer d'un nombre à son successeur, on ajoute 1 point à la droite de la configuration précédente sans en changer la disposition (sur un dé classique, le passage de 3 à 4 demande de modifier la disposition des points intégralement. Ici, il suffit de compléter le 3 par un point sur le coin vide) ;
   — travailler les décompositions de manière visuelle : par exemple, 5 c'est 3 et encore 2 (si on lit verticalement) ou c'est 2 et encore 2 et encore 1 (si on lit horizontalement), ou encore c'est 4 et encore 1.

SITUATION 2 :

1. Analyse des productions d'élèves :
   — **Robin.** Il sait que multiplier par 5 revient à multiplier par 10, puis à diviser par 5.
   Il commence par calculer 10×68 car il sait effectuer une multiplication par 10 mentalement, il obtient 680. Puis il divise par 2 et trouve 340.
   Son résultat et sa procédure sont justes, il y a cependant une erreur d'écriture puisqu'il écrit en ligne ses calculs à la suite, le statut du signe « = » n'est alors pas respecté puisqu'on peut lire « $10 \times 68 = 340$ ». Il aurait dû écrie $10 \times 68 = 680$, puis $680 \div 2 = 340$.

   — **Eléonore.** Elle passe par la décomposition de 68 comme $70 - 2$ puis elle utilise la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction.
   Elle effectue $70 \times 5 = 350$ certainement en calculant mentalement que $7 \times 5 = 35$ puis en « ajoutant un zéro » afin d'effectuer la multiplication par 10. Ensuite, elle effectue le calcul $2 \times 5 = 10$ et enfin, elle soustrait ses deux résultats pour obtenir 340.
   Sa procédure et son résultat sont justes.

   — **Lucie.** Elle utilise la décomposition additive de 68 qui est $60 + 8$ puis elle utilise la distributivité de la multiplication sur l'addition.
   Elle effectue $5 \times 60 = 300$ certainement en calculant mentalement que $5 \times 6 = 30$ puis en « ajoutant un zéro » afin d'effectuer la multiplication par 10. Ensuite, elle effectue le calcul $5 \times 8 = 40$ et enfin, elle additionne ses deux résultats pour obtenir 340.
   Sa procédure et son résultat sont justes.

   — **Mathys.** Il utilise l'écriture de 68 en multipliant successivement 5 par 6 ce qui donne 30 et 5 par 8 ce qui donne 40 puis il additionne ces deux résultats.
   Sa procédure aurait pu être correcte s'il avait pensé que 5×6 correspondait au nombre de dizaines mais il ne semble pas avoir conscience de la signification de l'écriture positionnelle de notre système de numération puisqu'il considère le 6 des dizaines et le 8 des unités de la même manière. Son résultat est faux.

2. Voici quelques démarches possibles par un élève de cycle 3 :

Calculs.	Démarche.	Connaissances.
$100 \times 28 = 2\,800$ $2\,800 \div 2 = 1\,400$ $1\,400 \div 2 = 700$.	25 c'est 100 divisé par 4 ; diviser par 4, c'est diviser par 2 puis encore diviser par 2.	Multiplication par 100, division par 2 (prendre la moitié).
$100 \times 28 = 2\,800$ $2\,800 \div 4 = 700$.	Multiplier par 25, c'est multiplier par 100 puis diviser par 4.	Multiplication par 100, division par 4 (table des 4).
$28 = 30 - 2$ $25 \times 30 = 750$ $25 \times 2 = 50$ $750 - 50 = 700$	Décomposition de 28 à partir de la dizaine la plus proche 30, multiplication par 25 de 30 et 2, soustraction des résultats.	Décomposition d'un nombre, multiplication par 25 de nombre simples, distribution de la multiplication sur la soustraction.
$25 \times 28 = (20 + 5) \times (20 + 8)$ $20 \times 20 = 400$ $20 \times 8 = 160$ $5 \times 20 = 100$ $5 \times 8 = 40$ $400 + 160 + 100 + 40 = 700$	Décomposition additive des deux facteurs, calculs de tous les termes issus des multiplications, addition des résultas obtenus.	Décomposition additive, distributivité de la multiplication sur l'addition, multiplications par 2, 5 et 10.

SITUATION 3 :

1. Cette situation permet de travailler le champ multiplicatif puisqu'il s'agit d'une activité d'agrandissement. Plus particulièrement, la situation se situe dans le thème transversal de la proportionnalité dans le domaine des grandeurs et mesures.

2. Analyse des trois premières affiches :
   — **Affiche n°1.** Les élèves ont « vu » que 6 cm, c'est 4 cm + 2 cm. Ils ont donc ajouté 2 cm à toutes les mesures du côté droit et du bas du carré. Pour le haut et le côté gauche, ils ont ajouté 3 cm, peut-être parce que les valeurs d'origine à augmenter (5 cm et 6 cm) sont plus grandes, donc il faut ajouter un peu plus que 2 cm. On remarque toutefois que l'agrandissement est le même pour toutes les mesures d'un même côté, y compris pour 7 cm qui est plus grand que 6 cm.
   Réussites : ils ont su modéliser la situation par un schéma, ils ont repéré qu'il ne fallait pas toujours ajouter le même nombre.
   Erreurs : ils ont commis l'erreur classique consistant à penser qu'augmenter une mesure, c'est ajouter un nombre, c'est à dire effectuer une addition alors que l'on se situe dans le champ multiplicatif. Les valeurs à l'intérieur du carré n'ont pas été agrandies (oubli ?).

   — **Affiche n°2.** Les élèves ont remarqué qu'ajouter 2 cm à 4 cm, c'est ajouter deux fois 1 cm qui est le quart de 4 cm, c'est à dire, en langage mathématique : 6 cm = 4 cm + $\frac{1}{4}\times$ 4 cm. Ils utilisent les propriétés de linéarité mixte (additive et multiplicative).
   Réussites : ils ont su modéliser la situation en donnant toutes les mesures nécessaires pour l'agrandissement du puzzle, ils ont trouvé les bons résultats par un raisonnement tout à fait pertinent.
   Erreur : la phrase d'explication est un peu litigieuse car elle laisse penser qu'il faut ajouter le quart de la valeur d'origine (par exemple 4 cm + 1 cm = 5 cm) puis multiplier ce nombre par 2 (2×5 cm = 10 cm). Il aurait été préférable d'écrire par exemple « il faut prendre le quart de chaque nombre, le multiplier par 2, puis ajouter le nombre obtenu au nombre de départ ».

   — **Affiche n°3.** Ils sont utilisé les propriétés de linéarité multiplicative appliquées aux valeurs données dans l'énoncé (4 cm devient 6 cm) en prenant les deux coefficients scalaires un demi et 3 : 6, c'est 3 fois 2 et 2, c'est 4 divisé par 2. Ensuite, ils ont appliqué ces coefficients à chacune des mesures du dessin.
   Réussites : explication claire de la procédure, calculs corrects sans erreur d'écriture y compris pour les nombres décimaux. Pas d'erreur.

3. Procédures utilisées pour l'affiche n°4 :
   — $\mathbf{4 \to 6}$: reprise de l'énoncé.
   — $\mathbf{6 \to 9}$: on peut penser que les élèves ont ajouté la moitié de 6 à 9 qui est 3 en vertu de ce qu'ils ont fait par la suite.
   — $\mathbf{7 \to 10,5}$: pas d'explication.
   — $\mathbf{2 \to 3}$: par analogie avec la correspondance $4 \to 6$, 2 étant la moitié de 4, il faut calculer la moitié de 6 qui est 3. Ils ont utilisé implicitement la propriété de linéarité multiplicative de la proportionnalité.
   — $\mathbf{5 \to 7,5}$: 5 c'est 4 + 1 soit 4 + 2÷2 donc, les élèves utilisent une procédure mixte utilisant la linéarité additive et multiplicative. Ils appliquent alors cette procédure pour passer de 5 à 7,5 : pour 4 cm, l'agrandissement vaut 6 cm et pour 2 cm, il est de 3 cm, donc pour 1 cm il est de 1,5 cm et pour 5 cm on a donc 6 cm + 1,5 cm = 7,5 cm.
   — $\mathbf{9 \to 13,5}$: même procédure que précédemment en utilisant la décomposition $9 = 4 + 4 + 1$ soit $4 + 4 + 2 \div 2$. Pour 4 cm on a 6 cm et pour 2 cm on a 3 cm, donc pour 9 cm, on a 6 cm + 6 cm + 3 cm ÷ 2 = 13,5 cm.