Ce document est un exemple de corrigé du sujet du groupement 1 proposé le 09 avril 2019 au concours de professeur des écoles, il ne s'agit pas d'un corrigé officiel. Il ne s'agit pas non plus d'un corrigé exhaustif : il peut y avoir d'autres procédures de résolution en mathématiques et d'autres réponses en didactique !

1

PREMIÈRE PARTIE (13 points)

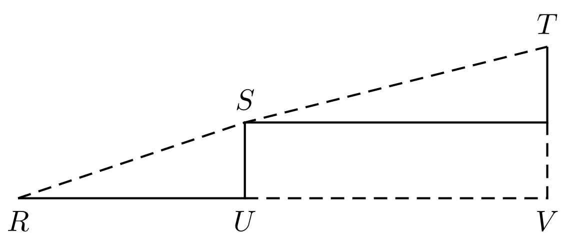
A. Situation des trois carrés.

1. — Calcul de la somme S_1 des aires des deux carrés gris : $S_1 = 3^2 + 4^2 = 25$.
   — Calcul de l'aire S_2 du carré blanc : $S_2 = 5^2 = 25$.
   $\boxed{\text{La somme des aires des deux carrés gris est égale à l'aire du carré blanc.}}$

2. Dans la question précédente, on a montré que $3^2 + 4^2 = 5^2$ soit $AC^2 + AB^2 = CB^2$.
   D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.
   $\boxed{\text{L'affirmation de Claude est vraie.}}$

3. — Dans le triangle MNP, rectangle en P, on utilise le théorème de Pythagore :
   $MN^2 = MP^2 + PN^2 = (12 \text{ cm})^2 + (5 \text{ cm})^2 = 169 \text{ cm}^2$. D'où $MN = 13$ cm.
   13 est un nombre entier naturel, c'est donc aussi un nombre décimal.
   — Les points M, I, N et M, J, P sont alignés dans cet ordre, les droites (IJ) et (NP) sont parallèles puisqu'on a des carrés. D'après le théorème de Thalès, on a :
   $\dfrac{MJ}{MP} = \dfrac{MI}{MN} = \dfrac{JI}{PN} \iff \dfrac{3 \text{ cm}}{12 \text{ cm}} = \dfrac{MI}{MN} = \dfrac{JI}{5 \text{ cm}}$.
   On a $IJ = \dfrac{3 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}}{12 \text{ cm}} = \dfrac{15 \text{ cm}^2}{12 \text{ cm}} = \dfrac{5}{4} \text{ cm} = \dfrac{5}{2^2}$ cm.
   Ce nombre, mis sous forme irréductible, ne comporte que des puissances de 2 au dénominateur, c'est donc un nombre décimal.
   $\boxed{\text{L'affirmation de Dominique est vraie.}}$

4. On considère la figure suivante qui est une coupe parallèle à la base de la figure 3 :



On a $\dfrac{RU}{RV} = \dfrac{3 \text{ cm}}{7 \text{ cm}} = \dfrac{3}{7}$ et $\dfrac{SU}{TV} = \dfrac{1 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = \dfrac{1}{2}$ soit $\dfrac{RU}{RV} \neq \dfrac{SU}{TV}$.
Or, les point R, U, V sont alignés et les droites (SU) et (TV) sont parallèles, puisque ce sont les supports des côté opposés du carré du milieu. Ainsi, si les points R, S, T étaient alignés, d'après le théorème de Thalès les rapports seraient égaux ce qui n'est pas le cas. Donc :
$\boxed{\text{L'affirmation de Camille est fausse.}}$

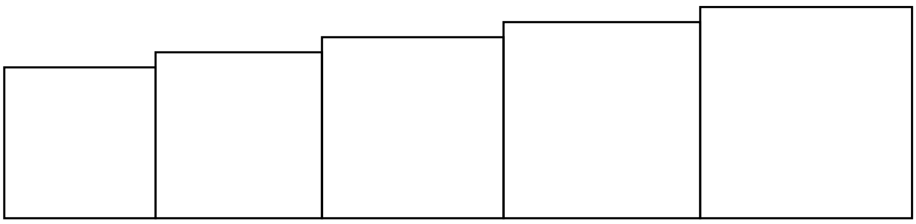
B. Situation des cinq carrés.

1. Ce problème se modélise par l'équation suivante :
   $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2$
   $\iff \cancel{n^2} - 4n + \cancel{4} + \cancel{n^2} - 2n + \cancel{1} + n^2 = \cancel{n^2} + 2n + \cancel{1} + \cancel{n^2} + 4n + \cancel{4}$
   $\iff n^2 - 12n = 0.$
   $\boxed{\text{Résoudre ce problème revient à résoudre l'équation } n^2 - 12n = 0.}$

2. $n^2 - 12n = 0 \iff n(n-12) = 0.$
   Les solutions de cette équation sont les solutions de $n = 0$ et $n - 12 = 0$.
   $\boxed{\text{Les solutions de l'équation } n^2 - 12n = 0 \text{ sont 0 et 12.}}$

3. n est la mesure en centimètre du côté du carré du milieu, donc 0 ne peut pas être une solution valable puisqu'alors la mesure de chacun des côtés des carrés gris serait négative ou nulle.
   $\boxed{\text{Seule la solution 12 peut être retenue comme solution à ce problème.}}$

4. Avec $n = 12$, les mesures successives en centimètre des côtés des carrés sont $10, 11, 12, 13$ et 14. À l'échelle $\dfrac{1}{5}$, on divise chaque mesure par 5 et on obtient les mesures : 2 cm ; 2,2 cm ; 2,4 cm ; 2,6 cm et 2,8 cm ce qui donne la figure suivante :



C. Situation des sept carrés.

1. Graphiquement, il suffit de trouver les abscisses des points d'intersection des deux courbes de f et g, il y en a deux.
   $\boxed{\text{La situation des sept carrés semble avoir deux solutions : } x = 3 \text{ et } x = 27.}$

2. — Pour $x = 3$, la longueur du côté plus grand carré blanc mesurerait 3 cm, et donc la longueur des côtés des carrés gris serait négative ou nulle ce qui n'est pas possible.
   — Pour $x = 27$, on obtient les longueurs suivantes en centimètre : 21, 22, 23, 24, 25, 26 et 27. Or, $21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 2\,030$ et $25^2 + 26^2 + 27^2 = 2\,030$.
   $\boxed{\text{La valeur } x = 3 \text{ ne convient pas mais la valeur } x = 27 \text{ répond bien au problème.}}$

D. Situation des quatre carrés.

1. Pour le cas 2, l'aire de la partie blanche est égale à l'aire du quatrième carré, il suffit donc de regarder dans quelle feuille de calcul c'est également le cas, il s'agit de B.

   La feuille de calcul A correspond au cas 1 et la feuille B correspond au cas 2.

2. a. En E2, on a pu saisir la formule : `=(A2+3)∧2`

   b. En F2, on a pu saisir la formule : `=B2+E2`

3. — Pour la feuille de calcul A, on remarque que la valeur de chaque cellule de la colonne F est augmentée de 4 par rapport à sa cellule voisine de la colonne G, et si cela se vérifie pour toutes les valeurs, alors les deux aires ne pourront pas être égales.

   — Pour la feuille de calcul B, les valeurs des cellules de la colonne F augmentent plus vite que celles de la colonne G tout en étant supérieures à partir de 2. Pour 1, les aires ne sont pas égales et comme les valeurs des côtés sont des nombres entiers naturels, il semble impossible de trouver une solution au problème.

   D'après les copies d'écran, on peut conjecturer qu'il n'y a aucune solution au problème quelle que soit la configuration.

4. On appelle n la mesure, en centimètre, du côté du carré le plus petit.

   — Le cas 1 se modélise par l'équation suivante :

   $n^2 + (n+3)^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2$

   $\iff \cancel{n^2} + \cancel{n^2} + 6n + 9 = \cancel{n^2} + 2n + 1 + \cancel{n^2} + 4n + 4$

   $\iff \cancel{6n} + 9 = \cancel{6n} + 5$

   $\iff 9 = 5$

   Cette équation n'est donc pas possible.

   — Le cas 2 se modélise par l'équation suivante :

   $n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = (n+3)^2$

   $\iff \cancel{n^2} + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 = \cancel{n^2} + 6n + 9$

   $\iff 2n^2 + \cancel{6n} + 5 = \cancel{6n} + 9$

   $\iff 2n^2 = 4$

   $\iff n^2 = 2.$

   Les solutions de cette équation sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ qui ne sont pas des nombres entiers, donc le cas 2 n'a pas de solution.

   La « situation des quatre carrés » n'a pas de solution.

2

DEUXIÈME PARTIE (13 points)

EXERCICE 1

1. — Calcul du nombre moyen n_1 de tablettes défectueuses pour la société 1 :
   $n_1 = \dfrac{2}{100} \times 7\,000 + \dfrac{5}{100} \times 2\,000 = 240.$
   Le pourcentage de tablettes défectueuses est donc $d_1 = \dfrac{240}{2\,000 + 7\,000} \times 100 = \dfrac{8}{3} \simeq 2,67\,\%.$

   — Calcul du nombre moyen n_2 de tablettes défectueuses pour la société 2 :
   $n_2 = \dfrac{2}{100} \times 1\,000 + \dfrac{3}{100} \times 6\,000 = 200.$
   Le pourcentage de tablettes défectueuses est donc $d_2 = \dfrac{200}{1\,000 + 6\,000} \times 100 = \dfrac{20}{7} \simeq 2,86\,\%.$

   $\boxed{\text{L'affirmation 1 est vraie.}}$

2. — Calcul du volume $\mathcal{V}_1$ et de l'aire $\mathcal{A}_1$ d'un cube de côté 1 cm :
   $\mathcal{V}_1 = (1 \text{ cm})^3 = 1 \text{ cm}^3$ et $\mathcal{A}_1 = 6 \times (1 \text{ cm})^2 = 6 \text{ cm}^2.$

   — Calcul du volume $\mathcal{V}_2$ et de l'aire $\mathcal{A}_2$ d'un cube de côté 2 cm :
   $\mathcal{V}_2 = (2 \text{ cm})^3 = 8 \text{ cm}^3$ et $\mathcal{A}_2 = 6 \times (2 \text{ cm})^2 = 24 \text{ cm}^2.$

   De la situation 1 à la situation 2, le volume est multiplié par 8 alors que l'aire totale est multipliée par 4, il n'y a donc pas homogénéité de la multiplication.

   $\boxed{\text{L'affirmation 2 est fausse.}}$

3. Le récupérateur d'eau de pluie contient $0,3 \text{ m}^3 = 0,3 \times (10 \text{ dm})^3 = 300 \text{ dm}^3 = 300$ L.
   Avec cette quantité, on peut donc arroser $\dfrac{300 \text{ L}}{15 \text{ L/m}^2} = 20 \text{ m}^2$ de potager, soit $4 \times 5 \text{ m}^2$.

   $\boxed{\text{L'affirmation 3 est vraie.}}$

4. $A^2 = \left(7 + \dfrac{2}{10}\right)^2 = 7^2 + 2 \times 7 \times \dfrac{2}{10} + \left(\dfrac{2}{10}\right)^2 = 49 + \dfrac{28}{10} + \dfrac{4}{100} = 49 + 2 + \dfrac{8}{10} + \dfrac{4}{100}.$
   La partie décimale est donc $\dfrac{8}{10} + \dfrac{4}{100}.$

   $\boxed{\text{L'affirmation 4 est fausse.}}$

EXERCICE 2

1. a. La somme des effectifs du nombre d'apparition des faces 1, 2, 3, 4 et 5 vaut
   $30 + 41 + 32 + 28 + 31 = 162$. Or, $200 - 162 = 38$. Donc,
   $\boxed{\text{La face 6 a été obtenue 38 fois.}}$

   b. On a obtenu 30 fois la face 1 pour 200 lancers soit $f = \dfrac{30}{200} = 0,15.$
   $\boxed{\text{La fréquence d'apparition du « 1 » est de 15 \%.}}$

2. Pour cette question, on peut par exemple modéliser la situation par un tableau.

×	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	$\boxed{12}$
3	3	6	$\boxed{9}$	$\boxed{12}$	15	18
4	4	8	$\boxed{12}$	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	$\boxed{12}$	18	24	30	36

Chaque situation est équiprobable puisque les dés sont équilibrés, il suffit donc de dénombrer les cas qui mènent à 9 ou a 12 et de diviser ce nombre par 36, nombre de cas possible.

a. Probabilité d'obtenir un produit égal à 9 :
$\boxed{P_9 = \frac{1}{36}.}$

b. Probabilité d'obtenir un produit égal à 12 :
$\boxed{P_{12} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.}$

EXERCICE 3

1. Le programme A trace $\boxed{\text{un carré}}$ de côté 100 et le programme B trace $\boxed{\text{un triangle équilatéral}}$ de côté 100.

2. a. D'après le résultat donné en préambule, la somme des mesures des angles d'un polygone régulier à 5 côtés vaut $180^\circ \times 5 - 360^\circ = 540^\circ$.
   Chaque angle du pentagone a donc pour mesure $\frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$.
   Or, l'angle $\widehat{FBC}$ est l'angle supplémentaire à l'angle $\widehat{ABC}$ puisque les points A, B et F sont alignés, d'ou $\widehat{FBC} = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$.
   $\boxed{\text{L'angle } \widehat{FBC} \text{ mesure } 72^\circ.}$

   b. Pour obtenir un pentagone régulier, on doit apporter deux modifications au programme A :
   — ligne 5 : répéter $\boxed{5}$ fois ;
   — ligne 7 : tourner ↷ de $\boxed{72}$ degrés.

3. Le programme qui permet de réaliser le tracé est $\boxed{\text{le programme 2.}}$
   — Le programme 1 comporte deux erreurs : la modification d'orientation (180/nombre de côtés au lieu de 360/nombre de côtés) et le nombre de répétitions qui est fixé à 10 alors qu'il dépend du nombre de côtés du polygone.
   — Le programme 3 comporte une erreur : la modification d'orientation est fixée à $360^\circ/10 = 36^\circ$ alors qu'elle dépend du nombre de côtés du polygone régulier.
   — Le programme 4 comporte une erreur : la modification d'orientation (180/nombre de côtés au lieu de 360/nombre de côtés).

4. Plus on augmente le nombre de côtés dans un polygone régulier, plus le polygone va « ressembler » à un cercle.
   $\boxed{\text{Il suffit d'entrer une assez grande valeur}}$ comme par exemple 100 pour avoir une représentation visuelle assez fidèle d'un cercle (à partir de 50 on obtient déjà une bonne représentation).

3

TROISIÈME PARTIE (14 points)

SITUATION 1 :

1. Dans cette situation, c'est l'aspect cardinal du nombre qui est utilisé, qui permet de dénombrer une collection.

2. Le quai permet de vérifier que les élèves ne remplissent pas les places vides de façon mécanique, par correspondance terme à terme, ou un par un. Ils déposeront dans un premier temps leurs jetons sur le quai, puis ils pourront valider leur réponse dans un deuxième temps en les plaçant sur les places libres.

3. — L'élève A ramène un nombre de jetons, puis en choisit le bon nombre. On ne sait pas quelle procédure il utilise mais il est probable qu'il utilise la correspondance terme à terme, puis il ramène les jetons en trop [1].
   — L'élève B semble avoir acquis le principe cardinal du nombre : il a dénombré les places vides et a ramené le bon nombre de jetons en une seule fois.
   — L'élève C semble avoir utilisé la procédure de correspondance terme à terme en associant à chaque voyage un jeton à une place libre. Il a pu déposer par exemple les jetons sur le quai de la même manière que les places libres sur le support. Il n'a probablement pas encore le réflexe du dénombrement.
   — L'élève D a pu dénombrer les jetons dans chaque colonne : dans ce cas, il a acquis le principe cardinal pour un nombre inférieur à cinq. On pourrait aussi supposer qu'il a utilisé ses doigts (par comptage ou correspondance terme à terme) pour effectuer son voyage ou qu'il a « vu » par subitisation quatre et trois places vides.

4. — On peut proposer aux élèves d'effecteur un seul voyage jusqu'à la boite.
   — On peut aussi modifier le nombre de jetons (en mettre moins) ou la disposition des jetons.
   — On peut également éloigner la partie libre du support de chaque élèves afin qu'ils ne puissent pas effectuer une correspondance terme à terme directe.

1. La dénomination de « deuxième voyage » peut être ambigüe car un voyage correspond théoriquement à un aller-retour vers la boite. Ici il semble que le deuxième voyage corresponde au retour du premier voyage.

SITUATION 2 :

1. Analyse des productions d'élèves :

Calcul 1	
Élève 1	Élève 2
L'élève 1 choisit de soustraire 6,8 en trois temps par conservation des écarts : il soustrait tout d'abord 6 unités aux deux nombres, puis 42 centièmes, et enfin 38 centièmes.	L'élève 2 commence par convertir chacun des deux nombres en centièmes et en dixièmes en rapport à la dénomination orale de le l'enseignant. Ensuite, il transforme sa soustraction de manière à n'avoir que des centièmes. Il se rapporte alors à une soustraction sur les entiers. Enfin, il procède par conservation des écarts en ajoutant 20 centièmes à chacun des nombres pour pouvoir calculer le résultat final. Son résultat est donné en centièmes.
Pour les deux élèves, il n'y a pas d'erreur et ils semblent avoir une bonne maîtrise des nombres décimaux et de la soustraction par conservation des écarts.	

Calcul 2	
Élève 3	Élève 4
L'élève 1 effectue le produit en utilisant la décomposition canonique de 15 en $10+5$ puis en effectuant le calcul mental $10 \times 0,24$ et $5 \times 0,24$. Il effectue ensuite l'addition des deux nombres décimaux obtenus. Il maîtrise la multiplication d'un nombre décimal par 5 et 10.	L'élève 4 transforme 0,24 en 24 centièmes afin d'effectuer une multiplication sur des entiers, puis décompose 24 en $20+4$. Il calcule mentalement 15×20 et 15×4 puis effectue l'addition des deux nombres obtenus.
Pour les deux élèves, il n'y a pas d'erreur et ils semblent avoir une bonne maîtrise des nombres décimaux et de la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.	

2. — Pour les deux calculs, les élèves 1 et 3 effectuent leurs calculs sur les nombres décimaux « non transformés » alors que les élèves 2 et 4 transforment l'écriture sous forme décimale en une écriture avec des nombres entiers et laissent le résultat ainsi. On ne sait pas s'il savent manipuler correctement les opérations sur les nombres décimaux mais ils maîtrisent leur architecture.
   — Pour le calcul 1, si on ne considère que le calcul de la différence, l'élève 1 procède par étapes successives de soustractions en effectuant les calculs qui lui paraissent les plus simples alors que l'élève 2 semble vouloir optimiser le calcul.
   — Pour le calcul 2, si on ne considère que le calcul du produit, l'élève 3 décompose le terme de gauche alors que l'élève 4 décompose celui de droite.

SITUATION 3 :

1. La notion principalement travaillée dans ces exercices est la proportionnalité.

2. — L'élève A utilise la linéarité additive : étant donné que 24 personnes c'est 9 personnes plus 15 personnes, il faut 6 œufs plus 10 œufs soit 16 œufs pour 24 personnes. On peut remarquer que la première intention de cet élève était de faire une division, peut-être pour effectuer un passage par l'unité, mais les nombres mis en jeu incitent davantage à la procédure plus rapide de la linéarité additive.
   — L'élève B procède par schématisation des personnes puis procède à deux additions posées en colonnes, en lien avec une procédure de linéarité additive comme pour l'élève A.
   — L'élève C semble voir que 15 personnes, c'est 5 personnes plus 5 personnes plus 5 personnes. Or pour 5 personnes, soit la moitié de 10 personnes, il faut 3 œufs, donc pour 15 personnes il faut 3 œufs plus 3 œufs plus 3 œufs soit 9 œufs. Il utilise une procédure mixte de linéarité (multiplicative et additive).
   — L'élève D calcule le nombre de personnes pour 1 œuf, puis multiplie par le nombre d'œufs dont il dispose, il trouve 6. Il utilise une procédure de passage par l'unité.

   Tous les élèves ont une procédure et un résultat justes.

3. — Le premier énoncé permet de résoudre l'exercice grâce à une méthode qui est généralement vue en premier : la linéarité additive. Il se résout mentalement pas addition en une seule étape.
   — Le second énonce nécessite une réflexion plus soutenue et plusieurs calculs afin de résoudre l'exercice. Un élève de cycle 3 pourrait la résoudre par une procédure de linéarité mixte comme cela est le cas ici, mais aussi par passage par l'unité (nombre d'œuf pour une personne), ou par linéarité multiplicative (passant de 10 personnes à 15 personnes).
   — Le troisième énoncé nécessite également une réflexion plus soutenue et plusieurs calculs afin de résoudre l'exercice. Il peut se résoudre par passage par l'unité pour un œuf ou une personne ou grâce au coefficient de proportionnalité qui est de deux, cette méthode étant beaucoup moins utilisée par les élèves, le nombre de méthodes est plus limité pour ce dernier exercice.

4. On pourrait proposer un exercice faisant appel aux nombres décimaux par exemple :
   « Il faut 50 cL de lait pour faire 20 crêpes, je veux faire 15 crêpes, quelle quantité de lait me faut-il en centilitre ? »