Exercice : EDO ordre 1

Résoudre le problème de Cauchy

$$y' - 3y = \cos 3t + \sin 3t, \quad y(0) = 0$$

1) Equation homogène : $y' - 3y = 0$. Solution générale : $y_H(t) = Ce^{3t}$

2) Solution particulière :

- Méthode 1 : chercher une solution sous la forme $y_P(t) = a\cos 3t + b\sin 3t$ et on procède par identification. On a

$$y_P' - 3y_P = 3(b-a)\cos 3t - 3(a+b)\sin 3t = \cos 3t + \sin 3t$$

d'où

$$\begin{cases} 3b - 3a = 1 \\ -3b - 3a = 1 \end{cases}$$

d'où $a = -1/3$ et $b = 0$, ainsi

$$y_P(t) = -\frac{1}{3}\cos 3t$$

Méthode 2 : variation de la constante (plus long) : on pose $y_P(t) = C(t)e^{3t}$ d'où en mettant dans l'équation, on trouve

$$y'e^{3t} = \cos 3t + \sin 3t \ \Rightarrow y' = e^{-3t}\cos 3t + e^{-3t}\sin 3t$$

On voit assez facilement que la dérivée de $t \mapsto e^{-3t}\cos 3t$ est $t \mapsto -3e^{-3t}(\cos 3t + \sin 3t)$ d'où l'on trouve le même résultat pour $y_P = -1/3 \cos 3t$.

3) Solution générale :

$$y(t) = -\frac{1}{3}\cos 3t + Ce^{3t}$$

4) Résolution du problème de Cauchy : on veut $y(0) = 0$. On a $y(0) = -1/3 + C = 0$ donc $C = 1/3$. Ainsi, l'unique solution du problème de Cauchy est

$$y(t) = -\frac{1}{3}\cos 3t + \frac{1}{3}e^{3t}$$