Université d'Avignon - UFR-ip Sciences
L1 Physique-chimie
marie-claude.arnaud@univ-avignon.fr

Année 2018-19
UE Math 2

Corrigé succint du contrôle 1
durée : 1 heure
Les téléphones sont interdits.

Exercice 1. On considère la courbe $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = (e^{-t^2}, t^3 - 3t).$$

1. On suppose que que $\gamma(t) = \gamma(s)$. Alors $e^{-t^2} = e^{-s^2}$, donc $-s^2 = -t^2$, i.e. $s = \pm t$. Si le point est double, $s \neq t$ et donc on a $s = -t$. On écrit alors $\gamma_2(t) = \gamma_2(s)$, i.e. $t^3 - 3t = (-t)^3 - 3(-t)$, ce qui donne $2t(t^2 - 3) = 0$, c-à-d $t(t - \sqrt{3})(t + \sqrt{3}) = 0$. Donc soit $t = 0$, mais alors $s = t = 0$ ne donne pas un point double, soit $t = \pm\sqrt{3}$, et alors on trouve $\{s, t\} = \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$; On vérifie alors que

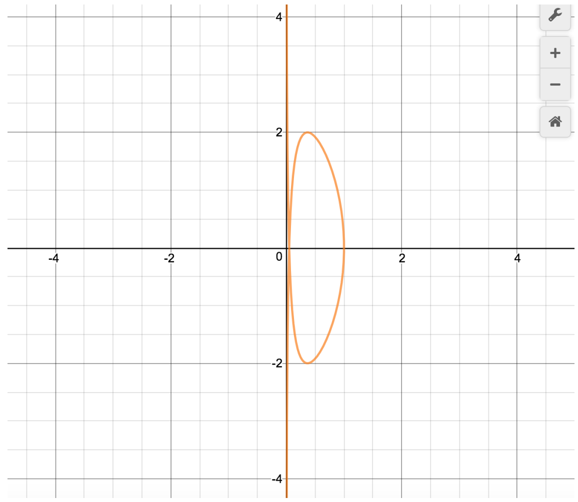
$$\gamma(\sqrt{3}) = (e^{-3}, 0) = \gamma(-\sqrt{3})$$

donne bien un point double.
2. (sur 4)

2.a.

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$\gamma_1(t)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\nearrow$	1	$\searrow$	e^{-1}	$\searrow$	0
$\gamma_1'(t)$		$+$	$+$	$+$	0	-	-	-	
$\gamma_2(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$
$\gamma_2'(t)$		$+$	0	-	-	-	0	$+$	

On a $\gamma_1'(t) = -2te^{-t^2}$ a même signe que $-t$
et $\gamma_2'(t) = 3(t-1)(t+1)$.
De plus, $\gamma(-1) = (e^{-1}, 2)$, $\gamma(0) = (1, 0)$ et $\gamma(-1) = (e^{-1}, -2)$.
2.b On a une tangente parallèle à l'axe des abcisses si et seulement si $\gamma_2'(t) = 0$, c-à-d pour $t = \pm 1$, que qui correspond aux points $(e^{-1}, 2)$ et $(e^{-1}, -2)$.
On a une tangente parallèle à l'axe des ordonnées si et seulement si $\gamma_1'(t) = 0$, c-à-d pour $t = 0$, que qui correspond au point $(1, 0)$.
3. On déduit de ci-dessus que l'équation de la tangente en $\gamma(0) = (1, 0)$ est $x = 1$.
On a $\gamma(2) = (e^{-4}, 2)$ et $\gamma'(2) = (-4e^{-4}, 9)$, donc l'équation de la tangente en $\gamma(2)$ est $-4e^{-4}(y - 2) = 9(x - e^{-4})$, ou encore $4y = 17 - 9e^4 x$.



Exercice 2. La période d'un pendule simple est donné par la formule : $T(\ell, g) = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ où $\ell > 0$ désigne la longueur du pendule et $g > 0$ la force de pesanteur.

1. On a $\frac{\partial T}{\partial \ell}(\ell, g) = \pi\frac{1}{\sqrt{\ell g}}$ et $\frac{\partial T}{\partial g}(\ell, g) = -\pi\sqrt{\frac{\ell}{g^3}}$. il s'agit de composée et de quotient de fonctions continues $\sqrt{}$, constantes..., qui sont donc continue. Ayant ses dérivées partielles continues, T est de classe C^1.
Sa différentielle est donnée par

$$DT(\ell, g)(\delta\ell, \delta g) = \frac{\partial T}{\partial \ell}(\ell, g)\delta\ell + \frac{\partial T}{\partial g}(\ell, g)\delta g$$

soit

$$DT(\ell, g)(\delta\ell, \delta g) = \pi\frac{1}{\sqrt{\ell g}}\delta\ell - \pi\sqrt{\frac{\ell}{g^3}}\delta g$$

2. Deux options pour faire ce calcul : utiliser une dérivée logarithmique ou faire un calcul direct. On trouve de toute façon

$$\frac{1}{T(\ell, g)}DT(\ell, g)(\delta\ell, \delta g) = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta\ell}{\ell} - \frac{\delta g}{g}\right).$$

Si on note I_T, I_ℓ et I_g les incertitudes relatives, on obtient

$$I_T \leq \frac{I_\ell + I_g}{2}$$

donc comme incertitude relative sur T la demi-somme des deux incertitudes relatives sur ℓ et g, soit 5%.