Université d'Avignon 2020-2021
Math II Licence 1 Physique-Chimie

CC1 : 15 mars 2021 : 17h30 - 19h (1h ; 1h20 pour les tiers temps)

On attachera le plus grand soin à la présentation et aux calculs. Aucun document ni appareil numérique autorisé. Dans tout exercice, on peut admettre le résultat d'une question pour en traiter d'autres.

Exercice 1. *On considère la courbe paramétrée d'équation*

$$\begin{cases} x(t) & = 2t - \frac{1}{t^2}, \\ y(t) & = 2t + t^2, \end{cases}$$

1) Quel est le domaine de définition de la courbe ?

2) Calculer le vecteur dérivée $(x'(t), y'(t))$.

3) Calculer l'équation de la tangente au point de paramètre $t = 1$.

4) Montrer que si $y(s) = y(t)$ alors $s + t = -2$. En déduire que la courbe admet un seul et unique point double (rappel : si s, t sont deux réels tels que $s + t = S$ et $st = P$ où $S, P \in \mathbb{R}$, alors s et t sont solutions de l'équation $X^2 - SX + P = 0$).*

Correction : La courbe est définie sur $\mathbb{R}^*$ (car t doit être non nul). On a $x'(t) = 2 + 2/t^3$ et $y'(t) = 2t + 2$. En $t = 1$, on a $x'(1) = y'(1) = 4$, et la vitesse est donc nulle (en tant que vecteur dans $\mathbb{R}^2$). Donc on peut calculer la tangente par le déterminant : ceci donne $(X - x(1))y'(1) - (Y - y(1))x'(1) = 0$ et donc $4X + 8 - 4Y = 0$ i.e. $Y = X + 2$. Puis on a $y(s) = y(t)$ si et seulement si $2t + t^2 = 2s + s^2$ i.e. ssi $2(t - s) + (t - s)(t + s) = 0$ c.a.d. $t + s = -2$. Pour le point double on a aussi l'équation $x(s) = x(t)$ ce qui donne

$$2s - \frac{1}{s^2} = 2t - \frac{1}{t^2} \iff 2(t - s) = -\frac{(t - s)(t + s)}{t^2 s^2} \iff 2 = -\frac{t + s}{t^2 s^2} \iff t^2 s^2 = 1$$

car $t \neq s$. D'où $st = 1$ ou $st = -1$.

1) 1er cas : $st = 1$. Alors s et t sont solutions de $X^2 + 2X + 1 = 0$ ce qui donne $X = s = t = -1$ absurde car $s = t$.

2) 2ème cas : $st = -1$. Alors, s et t sont solutions de $X^2 + 2X - 1 = 0$. Ainsi $s = -1 - \sqrt{2}$, $t = -1 + \sqrt{2}$. Il y a donc un seul et unique point double correspondant à cette valeur de s et t. Si on calcule explicitement, cela donne le point $(-5, 1)$.

Exercice 2. *Soit la fonction*

$$f(x, y) = 2\cos(3x)\sin(5y) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

1) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

2) Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$.

3) Trouver un couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \backslash (0, 0)$ tel que $a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - b\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Correction :

1) On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -6\sin(3x)\sin(5y) \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 10\cos(3x)\cos(5y)$$

2) On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -18\cos(3x)\sin(5y) \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -50\cos(3x)\sin(5y)$$

3) On a

$$a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - b\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \cos(3x)\sin(5y)\,[-18a + 50b]$$

et il suffit de prendre a, b t.q. $18a = 50b$ par exemple $a = 1$ et $b = 18/50$.

Exercice 3. *Dans un circuit électrique, on suppose que l'intensité du courant vaut $I = \frac{U}{R}$ où U est la tension et R la résistance. On a une incertitude relative de 2% sur la mesure de U et de 3% sur la mesure de R. Donner l'incertitude relative sur la mesure de I. (On pourra écrire I comme une fonction de R et et de U et calculer sa différentielle). ?*

Correction :
Ecrivons la différentielle de I au point (R, U) sur un accroissement $(\Delta R, \Delta U)$:

$$DI(R,U)(\Delta R, \Delta U) = \frac{\partial I}{\partial R}(R,U)\Delta R + \frac{\partial I}{\partial U}(R,U)\Delta U = -\frac{U}{R^2}\Delta R + \frac{\Delta U}{R}.$$

D'où :

$$\frac{DI(R,U)(\Delta R, \Delta U)}{I(R,U)} = -\frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta U}{U}.$$

Ainsi l'incertitude relative sur la mesure de I vérifie

$$\left|\frac{DI(R,U)(\Delta R, \Delta U)}{I(R,U)}\right| = \left| -\frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta U}{U}\right| \leq \left|\frac{\Delta R}{R}\right| + \left|\frac{\Delta U}{U}\right| = 5\%.$$

Barême indicatif :
- exercice 1 : 2 points par question (sauf question 2) sur 4 points) ;
- exercice 2 : 2 points par question ;
- exercice 3 sur 4 points.