Université d'Avignon - UFR-ip Sciences — Année 2019-2020
L1 Physique-chimie — UE Math 2

Feuille d'exercices 1 :
Courbes paramétrées / Fonctions de plusieurs variables / Exercices de révision

Courbes paramétrées

Exercice 1. Soit la courbe de Lissajous $(x(t), y(t)) = (\cos 3t, \sin 2t)$. Quelles sont les tangentes aux points $t = 0, \pi/4, \pi/3$?

Exercice 2. Soit la courbe $(x(t), y(t)) = (t/(t^2-1), t^2/(t-1))$. Trouver son domaine de définition. Trouver les éventuels points doubles. Montrer que la tangente en $t = 0$ est horizontale.

Exercice 3. Soit la courbe paramétrée définie par $f(t) = (t + t^2, 2t - t^3)$.
1) La courbe a-t-elle des points doubles, c-à-d existe-t-il des couple (t, s) avec $s \neq t$ tels que $f(s) = f(t)$?
2) Trouver les points où la tangente est parallèle à l'axe des abcisses et les points où la tangente est parallèle à l'axe des ordonnées.
3) Ecrire l'équation de la tangente au point $f(0)$ et de la tangente au point $f(1)$.

Exercice 4. Tracer la courbe d'équation $(x(t), y(t)) = (3t^2, 4t^3)$ (regarder la symétrie). Calculer l'équation de la tangente en $t = 1$. Montrer que le point de paramètre $t = 0$ est singulier.

Exercice 5. Soit la courbe $(x(t), y(t)) = (t + 1 + 1/(t-1), t^2 + 1 + 1/t)$. Quelle est son domaine de définition ? Combien la courbe a-t-elle de points doubles ?

Exercice 6. Etudier la courbe $(\cos t, \sin(t/3))$, $t \in \mathbb{R}$ (période, restriction du domaine de définition, symétries, tableau de variation avec dérivée, tracé de la courbe). Montrer que $(0, 1/2)$ est un point double. Combien y-a-t-il de points doubles ?

Exercice 7. Soit la courbe d'équation $(\sin 2t, \sin 3t)$, $t \in \mathbb{R}$. Donner les symétries de la courbe et montrer que l'on peut se ramener à l'étudier sur $[0, \pi/2]$. Tracer son graphe (dans le tableau de variation sur $[0, \pi/2]$, on considèrera les points $\pi/6$ et $\pi/4$). Y-a-t-il des points doubles ?

Exercice 8. Etudier la courbe $(a\cos^3 t, a\sin^3 t)$ (par périodicité et symétrie, réduire l'étude à l'intervalle $[0, \pi/4]$ en faisant $t \to 2\pi + t$, $t \to \pi + t$, $t \to \pi - t$, $t \to \pi/2 - t$; etudier la tangente en $t = 0$).

Exercice 9. Expliquer pourquoi la courbe $t \mapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$, $t \in \mathbb{R}$ représente un cercle ? Obtient-on réellement tout le cercle par ce paramétrage ?

Exercice 10. [plus difficile, exercice qui utilise la partie hors programme]. On veut étudier la courbe paramétrée au voisinage de $t = 1$.

$$f(t) = (1 + t(t-2)(t-1)^3, -1 + (t^2 - 2t + 5)(t-1)^3)$$

1) Ecrire $f(t) = f(1) + (t-1)^3 \left| \begin{array}{l} a \\ b \end{array} \right. + (t-1)^5 \left| \begin{array}{l} c \\ d \end{array} \right.$ où (a, b), (c, d) sont deux vecteurs à trouver.
2) En déduire la tangente à la courbe en $t = 1$ et la position de la courbe par rapport à la tangente.

Exercice 11. [plus difficile, exercice qui utilise la partie hors programme]. On veut étudier la courbe paramétrée au voisinage de $t = 0$.

$$f(t) = \left(\frac{\sin^3 t}{1+t}, (1+t)(\sinh t - \sin t)\right)$$

Mêmes questions que dans l'exercice précédent (Indication : par un DL, on établira une expression de f sous la forme : $f(t) = f(0) + t^3 \left|\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right. + t^4 \left|\begin{matrix} c \\ d \end{matrix}\right. + o(t^4)$ où (a, b), (c, d) sont deux vecteurs à trouver.

Exercice 12. [exercice plus optionnel]. Soit $e \in]0, 1[$ donné. Soit D la droite d'équation $x = d$, et soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points du plan tels que OM soit égal à $ed(M, D)$. Donner également une équation cartésienne de $\mathcal{E}$. Trouver également une équation polaire de $\mathcal{E}$.

Fonctions de plusieurs variables

Exercice 13. Pour les fonctions $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ et $g(x, y) = \sin(1 + x^3 + yx)$, donner le domaine de définition, dites si elles admettent des dérivées partielles, si oui les calculer, se poser la question de la différentiabilité.

Exercice 14. L'exercice est constituée de trois questions indépendantes.
1) Soit la fonction $f(x, y) = \cos(xy) + 2yx^2$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calculer les deux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.
2) Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1 + y^2 + x^3.$$

3) Dans un circuit électrique RLC soumis à une tension, on peut associer la période propre du système

$$T(L, C) = 2\pi\sqrt{LC},$$

où $L > 0$ est l'inductance de la bobine et $C > 0$ est la capacité du condensateur. On suppose que l'on a une incertitude relative de 2% sur la mesure de L et de C. Donner l'incertitude relative sur la mesure de la période.

Indication : on pourra au choix s'appuyer sur le calcul de la différentielle de T ou bien de $\ln(T)$ en un point (L_0, C_0) et appliquée à un vecteur quelconque $(L - L_0, C - C_0)$

Exercice 15. 1) Quel est le domaine de définition de $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ (le tracer) ?
2) Donner les dérivées partielles de $f(x, y) = x^2 + 3xy^2 + y^3$; $g(x, y) = e^{2x+y^2}(x^2 + y)$.

Exercice 16. 1) Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant $\frac{\partial f}{\partial x} = xy^2$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = yx^2$.
2) Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant $\frac{\partial f}{\partial x} = e^x y$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$.
(Indication : intégrer par rapport à une des variables ; puis redériver par rapport à l'autre).

Exercice 17. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Dériver sur $\mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto g(t) := f(2 + t, t^2)$ (montrer d'abord que g est C^1 sur $\mathbb{R}$).

Exercice 18. Donner le domaine de définition de la fonction $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) := x^2 z \arctan\left(\frac{y}{z}\right)$. Dites en quels points elle admet des dérivées partielles et si elle est différentiable en ces points

Exercice 19. Soit $u(t,x) = e^{-\alpha t}\sin(\beta x)$ où $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Trouver une condition sur (α,β) pour que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}.$$

Exercice 20. La période d'un pendule simple est $T(l,g) = 2\pi\sqrt{l/g}$ où l désigne la longueur du pendule et $g > 0$ est le champ de pesanteur.
1) Calculer les dérivées partielles de T ; vérifier que T est de classe C^1 ; calculer sa différentielle.
2) On mesure l et g avec une incertitude relative de 5%. Quelle incertitude relative trouve-t-on sur T ?

Exercice 21. On considère un gaz parfait obéissant à la loi : $pV = nRT$. Les nombres n et R étant constants, on peut exprimer la température $T(V,p)$ en fonction du volume V et de la pression p.
1. Vérifier que T est une fonction de classe C^1, calculer sa différentielle.
2. On mesure V avec une incertitude relative de 5% et p avec une incertitude relative de 2% ; avec quelle incertitude relative trouve-t-on T ?

Exercice 22. Soit $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. La courbe $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : I \to \mathbb{R}^2$ vérifie les équations de Hamilton suivante.

$$\dot{\gamma}_1(t) = \frac{\partial H}{\partial y}(\gamma(t)); \quad \dot{\gamma}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(\gamma(t)).$$

Montrer que la fonction $t \in I \mapsto H \circ \gamma(t)$ est constante.

Exercice 23. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x,y,z) = f(x^2 - y^2, y^2 - z^2, z^2 - x^2)$. Montrer que g est de classe C^1 et que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t,t,t) + \frac{\partial g}{\partial y}(t,t,t) + \frac{\partial g}{\partial z}(t,t,t) = 0.$$

Exercice 24. Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Soit $t_0 \in I$. Exprimer la différentielle de f en t_0 à l'aide du nombre dérivé $f'(t_0)$.

Exercices de révision

Ces exercices seront peut abordés (à part éventuellement durant le 1er TD).

Exercice 25. Résoudre $x^2 - 2x + 2 = 0$ puis $x^4 - 2x^2 + 2 = 0$ (passer en polaire). Résoudre $x^2 - 2mx + m^2 - 4 = 0$ où $m \in \mathbb{C}$. Pour quelles valeurs de m l'équation $(m+2)x^2 - (m+4)x - m + 2 = 0$ admet-elle deux racines distinctes strictement positives ? Résoudre

$$(3x-2)(5x+3) < 0 \; ; \; 2x^2 + 5x - 3 > 0 \; ; \; \frac{(4x-1)(2x+1)^3}{x(7x+2)} < 0 \; ; \; x^5 - x^3 - 12x = 0.$$

Soit $S, P \in \mathbb{R}$. Trouver deux nombres $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x + y = S$ et $xy = P$ (discuter).

Exercice 26. 1) Trouver la dérivée de $x \mapsto \arctan(x)$, $x \mapsto \arccos(x)$, $x \mapsto \arcsin(x)$ (réciproques de tan, cos, et sin).
2) Trouver une primitive de $x\ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Pouvez vous généraliser à $x^n\ln(x)$? Même question pour $x^n\exp(x)$.
3) Primitive de $\arcsin(x)$ (préciser le ou les intervalles).

Exercice 27. Trouver les DL suivants :
1. $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ en $t = 0$ à l'ordre 3
2. $f(t) = \tan(t)$ en $t = 0$ à l'ordre 3.
3. $f(t) = \arctan(t)$ en $t = 0$ à l'ordre 3.
4. $f(t) = e^t\cos(t)$ en $t = 0$ à l'ordre 5.
5. Trouver la limite de $f(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t\sin(t)}$ quand $t \to 0$, $t \neq 0$.

Exercice 28. A l'aide d'un DL, trouver la limite de $(1 + \frac{1}{n})^n$ quand $n \to +\infty$
Exercice 29. (plus dur) Trouver la limite de

$$\frac{1}{e}\frac{(n+1)^{n+1/2}}{n^{n+1/2}}$$

quand $n \to +\infty$ (mettre sous forme exponentielle ; factoriser dans le ln par n utiliser le DL de $\ln(1+x)$ en 0).

Exercice 30. Calculer

$$I_1 = \int_0^\pi \cos^2(x)dx \ ; \ I_2 = \int_0^\pi \sin^2 x dx \ ; \ I_3 = \int_0^{+\infty} te^{-t^2}dt \ ; I_4 = \int_2^3 \left[(t+1)^{5/2} + \ln(t) - \frac{1}{1-t}\right] dt$$