

# Université d'Avignon, Méthodologie 2021-2022

## Feuille n°5: Inégalités. Limites et fonctions.

**Exercice 1** Résoudre les inéquations suivantes.

1.  $2x - 1 > 0$ .
2.  $3x + 2 \leq x - 3$ .
3.  $x < 2x + 1$ .
4.  $3x + 1 < 2x - 1 < 7x$ .

**Exercice 2** Résoudre les inéquations ci-dessous.

- $u^2 - 9 < 0$ .
- $x^2 + x + 1 \geq 0$ .
- $4x^2 + x + 1 < 0$ .
- $2x^2 + 4x - 3 \geq 0$ .
- $(x - 1)(x + 2) > 0$ .
- $(x + 1)(1 + x + x^2) < 0$ .

**Exercice 3** Déterminer les réels  $x$  vérifiant les conditions ci-dessous. On pourra utiliser le langage des intervalles pour décrire les solutions.

- $|x| < 1$ .
- $|x - 1| \leq 1$ .
- $|x + 3| > 2$ .
- $|x - 1| = |x - 3|$ .
- $|x| \leq |x - 1|$ .

**Exercice 4** Pour chacune des fonctions suivantes, préciser l'ensemble de définition naturel.

- $x \mapsto \frac{1}{x}$ .
- $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$ .

- $x \mapsto \frac{1}{x^2-1} + \sin(x)$ .
- $x \mapsto \frac{x}{\cos(x)-1}$ .
- $x \mapsto \frac{\sin(2x)}{x^2+x-2}$ .

**Exercice 5** Dans chacun des cas suivants, précisez les fonctions  $f + g$ ,  $fg$ ,  $f/g$  et  $g/f$  en indiquant l'ensemble de définition.

- $f : x \mapsto 2x - 1$ ;  $g : x \mapsto x - 3$ .
- $f : x \mapsto x - 2$ ;  $g : x \mapsto 2x^2 - 5x + 3$ .
- $f : x \mapsto x + 1$ ;  $g : x \mapsto x^2 + 3x + 2$ .

**Exercice 6** Dans chacun des cas, trouvez l'ensemble de définition de  $f \circ g$  et  $g \circ f$  et calculez  $(f \circ g)(x)$  ainsi que  $(g \circ f)(x)$ .

1.  $f : x \mapsto 2x + 3$ ;  $g : x \mapsto x - 1$ .
2.  $f : x \mapsto \cos(x)$ ;  $g : x \mapsto x^3$ .
3.  $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ ;  $g : x \mapsto x - 2$ .
4.  $f : x \mapsto \sqrt{x}$ ;  $g : x \mapsto 2x - 1$ .

**Exercice 7** Pour chacun des cas suivants, écrivez  $f$  sous la forme  $g \circ h$  pour en déduire le sens de variation de  $f$ .

- $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ .
- $f(x) = (-x^2 + 1)^3$ .
- $f(x) = \sqrt{2 - x}$ .
- $f(x) = (x^3 - 1)^3$ .
- $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$ .

**Exercice 8** Représentez graphiquement les fonctions ci-dessous.

$$f : x \mapsto 1 + x^3.$$

$$f : x \mapsto x^2 - x - 2.$$

$$f : x \mapsto \frac{1}{x-1} + 1.$$

**Exercice 9** *Étudiez la limite, aux points  $a$  indiqués, de la fonction  $f$  proposée.*

1.  $x \mapsto 3$ ; ( $a = 10$ ).
2.  $x \mapsto |x|$ ; ( $a = 0$ ).
3.  $x \mapsto 2x^3 + 5x^2 - x + 1$ ; ( $a = 5$ ).
4.  $x \mapsto \frac{2x^2+x-1}{x-3}$ ; ( $a = 3$ ).
5.  $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ ; ( $a = 0$ ).
6.  $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x-1}}$ ; ( $a = 1$ ).
7.  $x \mapsto \frac{2x+1}{5x+3}$ ; ( $a = -3/5$ ).
8.  $x \mapsto \frac{x-1}{x^2-2x+1}$ ; ( $a = 1$ ).
9.  $x \mapsto \frac{2x-5}{3(x^2-5x+6)}$ ; ( $a = 2, a = 3$ ).

**Exercice 10** *On dit qu'une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est bornée sur  $I$  ssi il existe  $M > 0$  tel que pour tout  $x \in I$  on a  $|f(x)| \leq M$ . Pour chacune des fonctions ci-dessous, montrer qu'elle est bornée sur l'intervalle  $I$  et donner une borne.*

- $f(x) = \sqrt{x+1}$ ,  $I = [-1, 8]$ .
- $f(x) = 5 \sin(5x)$ ,  $I = \mathbb{R}$ .
- $f(x) = x^2 + x + 1$ ,  $I = [0, 5]$ .
- $f(x) = \cos(x) + \frac{1}{x^2+3}$ ,  $I = \mathbb{R}$ .

**Exercice 11** *Soit  $f$  une fonction bornée sur un intervalle  $I$ . On suppose que pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \neq 0$ . A-t-on nécessairement  $1/f$  bornée sur  $I$  ?*

**Exercice 12** *Soit  $I = [a, +\infty[$  un intervalle, avec  $a \in \mathbb{R}$ . Construire une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $f \circ f$  n'existe pas.*

**Exercice 13** *Représentez graphiquement la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par*

$$f(x) = |x + 1| + |x - 1|.$$

**Exercice 14** Calculez les limites en  $+\infty$  des fonctions suivantes.

- $f(x) = 2x^2 - 100x + 5.$

- $f(x) = -3x^2 + 5x + 8$

- $f(x) = x^3 - x^2.$

- $f(x) = \sqrt{2x - 5}.$

- $f(x) = \frac{2x-1}{3x+2}.$

- $f(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{3x+8}{2-x} \right).$

- $f(x) = \frac{-x^2+x}{x+1}.$

- $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+x+1}.$