Fiche du chapitre II - Équations différentielles linéaires

En vue d'une utilisation lors de l'examen, ne pas annoter (surligneur et encadrement autorisés).
Dans les différentes équations proposées, les grandeurs a, b et c sont des constantes données et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée. Les solutions sont exprimées en utilisant la variable réelle x. En général les solutions sont multiples, elles seront paramétrées par les nombres réels notés K, K_1 ou K_2 (ou R et φ).

Équations d'ordre 1

équations	solutions
$y' + ay = 0$ (équation homogéne)	$y(x) = K\,\mathrm{e}^{-ax}$
$y' + ay = f$	Etape 1 : $K\,\mathrm{e}^{-ax}$ est solution de l'équation homogéne (avec $f = 0$) Etape 2 : on détermine une solution particulière y_p - soit en reconnaissant une solution "évidente" - soit en utilisant la variation de la constante (voir ci-dessous) Etape 3 : toutes les solutions sont de la forme $y(x) = K\,\mathrm{e}^{-ax} + y_p(x)$.

La méthode de *variation de la constante* permet de déterminer une solution de l'équation complète en utilisant la forme de la solution de l'équation homogène : on cherche une solution de l'équation complète sous la forme $y_p(x) = g(x)e^{-ax}$ (on trouve que g doit être une primitive de la fonction $x \longmapsto f(x)e^{ax}$).
Remarque : si on doit résoudre une équation de la forme $y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$ où a est une **fonction** de la variable x, alors on reprend les différentes étapes ci-dessus en remplaçant les solutions de l'équation homogène (dans l'étape 1 et pour la méthode de variation de la constante) par $y(x) = Ke^{-A(x)}$, $K \in \mathbb{R}$ où A est une primitive de la fonction a.

Équations d'ordre 2

équations	solutions
$ay'' + by' + cy = 0$ avec $\Delta = b^2 - 4ac > 0$	On note λ_1 et λ_2 les deux solutions réelles de $aX^2 + bX + c = 0$ $y(x) = K_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + K_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$
$ay'' + by' + cy = 0$ avec $\Delta = b^2 - 4ac = 0$	On note λ l'unique solution réelle de $aX^2 + bX + c = 0$ $y(x) = (K_1 + K_2\,x)\mathrm{e}^{\lambda x}$
$ay'' + by' + cy = 0$ avec $\Delta = b^2 - 4ac < 0$	On note $u \pm iv$ les deux solutions complexes de $aX^2 + bX + c = 0$ (on a $u = \frac{-b}{2a} \in \mathbb{R}$ et $v = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \in \mathbb{R}$) $y(x) = (K_1\,\cos(vx) + K_2\,\sin(vx))\mathrm{e}^{ux}$ ou de façon équivalente (voir ci-dessous) : $y(x) = R\,\cos(vx + \varphi)\mathrm{e}^{ux}$

Dans le dernier cas, $R \geqslant 0$ et $\varphi \in [0, 2\pi[$ sont déterminés en fonction des constantes K_1 et K_2 :

$$R = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}, \qquad \cos\varphi = \frac{K_1}{R} \qquad \text{et} \qquad \sin\varphi = -\frac{K_2}{R}.$$