Fiche du chapitre III
Raisonnements, Ensembles, Dénombrements

En vue d'une utilisation lors de l'examen, ne pas annoter (surligneur et encadrement autorisés)

Propositions, quantificateurs, règles de logique

✓ Une **proposition** (ou **énoncé**, **assertion**) est une phrase mathématique dotée d'un sens.
– Une proposition peut être vraie (V) ou fausse (F).

A	non A
V	F
F	V

A	B	A ou B	A et B
V	V	V	V
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	F

[non A] : **négation** de A
[A ou B] : **disjonction** de A, B (« ou » inclusif)
[A et B] : **conjonction** de A, B.

✓ L'**implication** $A \Rightarrow B$ signifie : « Si A est vraie alors B est vraie ».
– Elle a même valeur de vérité que [(non A) ou B].
– Lorsque [$A \Rightarrow B$] est vraie, A est une **condition suffisante** pour B et B est une **condition nécessaire** pour A.

✓ L'**équivalence** $A \Leftrightarrow B$ est définie par la proposition : [$A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$].
– $A \Leftrightarrow B$ signifie que A et B ont mêmes valeurs de vérité, ou encore : « A est vraie **si et seulement si** B est vraie ».

La proposition :	est équivalente à :	
non(non A)	A	
non(A ou B)	(non A) et (non B)	
non(A et B)	(non A) ou (non B)	
$A \Rightarrow B$	(non B) $\Rightarrow$ (non A)	(Contraposition)
non($A \Rightarrow B$)	A et (non B)	

✓ Le **quantificateur** « $\exists$ » signifie « il existe » et le **quantificateur** « $\forall$ » signifie « quel que soit ».
– « il existe » est toujours synonyme de « il existe au moins un », et « il existe un unique » se note $\exists!$

La proposition :	est équivalente à :
$\exists x \in E,\ \exists y \in F,\ A(x,y)$	$\exists y \in F,\ \exists x \in E,\ A(x,y)$
$\forall x \in E,\ \forall y \in F,\ A(x,y)$	$\forall y \in F,\ \forall x \in E,\ A(x,y)$
non $\big(\exists x \in E,\ A(x)\big)$	$\forall x \in E, (\text{non } A(x))$
non $\big(\forall x \in E,\ A(x)\big)$	$\exists x \in E, (\text{non } A(x))$

MAIS [$\exists x \in E,\ \forall y \in F,\ A(x,y)$] et [$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ A(x,y)$] NE SONT PAS ÉQUIVALENTES.
– Un objet affecté d'un $\exists$ dépend de tous les objets affectés de $\forall$ qui le précèdent dans l'énoncé.

✓ La notation $\{x \in E\ ;\ A(x)\}$ désigne l'ensemble des x appartenant à E et tels que $A(x)$ vraie.

Méthodes de raisonnements

Pour Démontrer :	On peut utiliser un raisonnement :
L'assertion A	• **Direct** : on cherche une assertion B qui est vraie et qui implique A • **Par l'absurde** : on suppose que A est fausse et on cherche une contradiction.
L'implication $A \Rightarrow B$	• **Direct** : on suppose que A est vraie et on démontre qu'alors B est vraie. • **Par contraposition** : on démontre l'implication $[(\text{non}\, B) \Rightarrow (\text{non}\, A)]$.
L'équivalence $A \Longleftrightarrow B$	• **Par double implication** : on démontre les implications $[A \Rightarrow B]$ et $[B \Rightarrow A]$.
L'assertion $[\forall n \in \mathbb{N},\ A(n)]$	• **Par récurrence** : on démontre l'**initialisation** et l'**hérédité** : – Initialisation : $A(0)$ est vraie ; – Hérédité : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'implication $[A(n) \Rightarrow A(n+1)]$ est vraie. Le **principe de récurrence** permet de conclure que $[\forall n \in \mathbb{N},\ A(n)]$ est vraie.

Variantes du raisonnement par récurrence :

➢ **Récurrence à partir d'un certain rang** $n_0 \in \mathbb{N}$. Initialisation : $A(n_0)$ est vraie. Hérédité : pour tout $n \geq n_0$, l'implication $[A(0)\ \text{et}\ A(1)\ \text{et}\ \ldots\ \text{et}\ A(n)] \Rightarrow A(n+1)$ est vraie. Conclusion : $[\forall n \geq n_0,\ A(n)]$ est vraie.

➢ **Récurrence forte** :
- Initialisation : $A(0)$ est vraie ;
- Hérédité : pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'implication $[A(0)\ \text{et}\ A(1)\ \text{et}\ \ldots\ \text{et}\ A(n)] \Rightarrow A(n+1)$ est vraie.

➢ **Récurrence à deux pas** :
- Initialisation : $A(0)$ et $A(1)$ vraies ;
- Hérédité : pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'implication $[A(n)\ \text{et}\ A(n+1)] \Rightarrow A(n+2)$ est vraie.

✓ Pour déterminer $S = \{x \in E\ ;\ A(x)\}$, on peut utiliser un raisonnement par **analyse-synthèse** :
1. **Analyse** : On cherche une proposition plus simple $B(x)$ qui est vraie lorsque $A(x)$ est vraie.
2. **Synthèse** : Parmi les x satisfaisant la proposition $B(x)$, on sélectionne ceux qui vérifient $A(x)$.

Ensembles

✓ Une **partie** d'un ensemble E est un ensemble A dont tous les éléments appartiennent à E.
- On écrit $x \in A$ pour « x appartient à A » et $x \notin A$ signifie « x n'appartient pas à A ».
- On écrit $A \subset B$ pour « A est inclus dans B ».
- $\emptyset$ désigne la partie vide de E et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E.

✓ **Opérations** sur les parties. Soit A, B des parties d'un ensemble E.

➢ Pour obtenir l'égalité $A = B$, on procède souvent en démontrant les inclusions $A \subset B$ et $B \subset A$.

Définitions :

Complémentaire :	$\complement_E A = \{x \in E\ ;\ x \notin A\}$
Réunion :	$A \cup B = \{x \in E\ ;\ x \in A\ \text{ou}\ x \in B\}$
Intersection :	$A \cap B = \{x \in E\ ;\ x \in A\ \text{et}\ x \in B\}$
Différence :	$A \setminus B = \{x \in E\ ;\ x \in A\ \text{et}\ x \notin B\}$

Propriétés :

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$\complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$	$\complement_E(A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B)$

✓ Une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties non vides de E est une **partition** de E si :
1. $\forall i, j \in I, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$;
2. la réunion de toutes ces parties, notée $\bigcup_{i \in I} A_i$, est égale à E.

✓ Le **produit cartésien** $E \times F$ désigne l'ensemble de tous les couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$.

Applications

✓ Pour E et F deux ensembles non vide, une **application** $f : E \longrightarrow F$ est un procédé qui à tout $x \in E$ associe un unique élément $f(x) \in F$.

- On note $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F.
- Lorsque $f(x) = y$ on dit que y est **l'image** de x et que x est **un antécédent** de y pour la fonction f.
- L'application $\mathrm{Id}_E \in \mathcal{F}(E, E)$ (« identité de E ») est définie par $\mathrm{Id}_E(x) = x$ pour tout $x \in E$.
- Si $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$, la **composée** $g \circ f \in \mathcal{F}(E, G)$ est définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ pour tout $x \in E$.
- Si $A \subset E$ et $f \in \mathcal{F}(E, F)$, la **restriction** $f|_A$ de f à A est définie par $f|_A(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$.
- Si $A \subset E$, $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g = f|_A \in \mathcal{F}(A, F)$, on dit que f est un **prolongement** de g.
- La fonction indicatrice $\mathbb{1}_A \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ de la partie A de E, est définie par $\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$.

  On a : $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B,\ \ \mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B,\ \ \mathbb{1}_{\complement_E A} = 1 - \mathbb{1}_A$.

➢ Pour obtenir l'égalité $f = g$, on démontre : $[\ \forall x \in E,\ \ f(x) = g(x)]$.

✓ **Image directe** et **Image réciproque** par une application $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

Définitions : $\left\{\ \boxed{\begin{array}{ll} \textbf{Image directe} \text{ d'une partie } X \subset E : & f(X) = \{y \in F\ ;\ \exists x \in X,\ y = f(x)\} \\ \textbf{Image réciproque} \text{ d'une partie } Y \subset F : & f^{-1}(Y) = \{x \in E\ ;\ f(x) \in Y\} \end{array}}\right.$

Propriétés :

$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$	$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ ⚠
$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$	$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

✓ L'application $f \in \mathcal{F}(E, F)$ est $\left\{\ \boxed{\begin{array}{ll} \textbf{injective} \text{ si : } & \forall x, x' \in E,\ [f(x) = f(x')] \Rightarrow [x = x'] \\ \textbf{surjective} \text{ si : } & f(E) = F \\ \textbf{bijective} \text{ si : } & \text{elle est injective et surjective.} \end{array}}\right.$

- $[f$ injective $] \iff [\ \forall y \in F,\ \ f^{-1}(\{y\})$ contient au plus un élément $]$
- $[f$ surjective $] \iff [\ \forall y \in F,\ \ f^{-1}(\{y\})$ contient au moins un élément $] \iff [\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y]$
- $[f$ bijective $] \iff [\ \forall y \in F,\ \ f^{-1}(\{y\})$ contient exactement un élément $] \iff [\forall y \in F,\ \exists!\ x \in E,\ \ f(x) = y]$

➢ Lorsque f est bijective, l'application $g \in \mathcal{F}(F, E)$ qui associe à $y \in F$ l'unique $x \in E$ tel que $f(x) = y$ s'appelle la **bijection réciproque** de f et elle est notée f^{-1}.

➢ f est bijective équivaut à : $[\ \exists g \in \mathcal{F}(F, E),\ \ g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F\ ]$. On a alors $g = f^{-1}$.

✓ Une **permutation** de E une application bijective de E dans E.

- L'ensemble des permutations de E est noté $\mathcal{S}(E)$.
- Si $\sigma, \tau \in \mathcal{S}(E)$ alors $\sigma \circ \tau \in \mathcal{S}(E)$ et $\sigma^{-1} \in \mathcal{S}(E)$.
- Si $E = \{1, 2, \ldots, n\}$, on note $\mathcal{S}_n$ pour $\mathcal{S}(E)$ et on présente $\sigma \in \mathcal{S}_n$ sous la forme $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

Notations pour somme et produit

✓ La **somme** et le **produit** d'une famille finie $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R}$ de nombres réels sont notés :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n.$$

$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$	$\sum_{k=1}^n \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^n a_k$
$\prod_{k=1}^n (a_k b_k) = (\prod_{k=1}^n a_k)(\prod_{k=1}^n b_k)$	$\prod_{k=1}^n (\lambda a_k) = \lambda^n \prod_{k=1}^n a_k$

Factorielle d'un entier naturel :
$0! = 1$ et $n! = \prod_{k=1}^n k$ si $n > 0$.

Cardinal d'un ensemble fini, Dénombrement

✓ Le **Cardinal** d'un ensemble fini E est le nombre d'éléments qu'il contient : $\mathrm{Card}(E) \in \mathbb{N}$.

➢ Toute partie A d'un ensemble fini E est finie et $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(E)$.

➢ Si $A \subset B$ et B fini, alors : $[\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B) \iff A = B]$.

Soit E, F des ensembles finis et A, B des parties de E.

$\mathrm{Card}(A \cup B) + \mathrm{Card}(A \cap B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$	$\mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(\complement_E A) = \mathrm{Card}(E)$
$\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E).\mathrm{Card}(F)$	$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\mathrm{Card}(E)}$
$\mathrm{Card}(\mathcal{F}(E, F)) = \mathrm{Card}(F)^{\mathrm{Card}(E)}$	$\mathrm{Card}(\mathcal{S}(E)) = \big(\mathrm{Card}(E)\big)!$

✓ Soit E, F deux ensembles finis et $f \in \mathcal{F}(E, F)$. On a toujours : $\mathrm{Card}(f(E)) \leq \mathrm{Card}(E)$ et de plus :

➢ $[\mathrm{Card}(f(E)) = \mathrm{Card}(E)] \iff [\ f \text{ injective }]$.

➢ $[\mathrm{Card}(f(E)) = \mathrm{Card}(F)] \iff [\ f \text{ surjective }]$.

➢ Si $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$ alors : $[\ f \text{ injective }] \iff [\ f \text{ surjective }] \iff [\ f \text{ bijective }]$.

✓ Une p-**combinaison** dans un ensemble E est une partie de E de cardinal p.

➢ Si $\mathrm{Card}(E) = n$, alors le nombre de p-combinaisons est :

$$\boxed{\text{(Coefficient binomial)} \qquad \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ si } p \in [\![0, n]\!] \text{ et } \binom{n}{p} = 0 \text{ si } p > n.}$$

➢ Pour tout $n \geq 1$ et tout $p \in [\![1, n]\!]$: $\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} \quad \text{et} \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.}$

➢ Les valeurs de $\binom{n}{p}$ s'obtiennent aussi à l'aide du triangle de Pascal :

n \ p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1											
1	1	1										
2	1	2	1									
3	1	3	3	1								
4	1	4	6	4	1							
5	1	5	10	10	5	1						
6	1	6	15	20	15	6	1					
7	1	7	21	35	35	21	7	1				
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1			
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1		
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1

➢ Les coefficients binomiaux interviennent dans la formule du binôme de Newton :

$$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k.}$$

✓ Un p-**arrangement** dans E est la donnée d'une p-combinaison d'éléments énumérés dans un ordre donné. On le note comme un p-uplet $(x_1, \ldots, x_p)$ dont les composantes sont deux à deux distinctes.

➢ Il y a $p!$ p-arrangements différents pour une p-combinaison donnée.

➢ Au p-arrangement $(x_1, \ldots, x_p)$ correspond l'application injective $[\![1, p]\!] \to E,\ k \mapsto x_k$.
Il y a donc autant de p-arrangements dans E que d'injections de $[\![1, p]\!]$ dans E et si $\mathrm{Card}(E) = n$ alors ce nombre est

$$\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = p!\binom{n}{p}.}$$

Relations d'équivalence sur un ensemble

Une **relation binaire** sur un ensemble E est une partie $\mathcal{R}$ de $E \times E$. On note $x\mathcal{R}y$ lorsque $(x, y) \in \mathcal{R}$.

✓ Une relation binaire $\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence** si elle satisfait les trois propriétés suivantes :

1. $x\mathcal{R}x$ pour tout $x \in E$ ($\mathcal{R}$ est réflexive) ;
2. $\forall x, y \in E$, $[x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x]$ ($\mathcal{R}$ est symétrique) ;
3. $\forall x, y, z \in E$, $[(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z]$ ($\mathcal{R}$ est transitive) ;

Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E, la **classe d'équivalence** de x est :

$$\mathrm{cl}(x) = \{y \in E \ ;\ x\mathcal{R}y\} \subset E \qquad \text{(parfois notée } \overline{x} \text{ ou } \dot{x}\text{)}.$$

$\mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(y)$	$\iff$	$x\mathcal{R}y$
$\mathrm{cl}(x) \neq \mathrm{cl}(y)$	$\iff$	$\mathrm{cl}(x) \cap \mathrm{cl}(y) = \emptyset$

➢ Les classes d'équivalence distinctes de E forment une partition de E.

➢ L'ensemble des classes d'équivalences de E pour $\mathcal{R}$ est noté $E/\mathcal{R}$ et appelé ensemble quotient. L'application $q : E \longrightarrow E/\mathcal{R}$ définie par $q(x) = \mathrm{cl}(x)$ est l'application quotient canonique.

✓ Une relation binaire $\mathcal{R}$ est une **relation d'ordre** si elle satisfait les trois propriétés suivantes :

1. $x\mathcal{R}x$ pour tout $x \in E$ ($\mathcal{R}$ est réflexive) ;
2. $\forall x, y \in E$, $[x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y]$ ($\mathcal{R}$ est antisymétrique) ;
3. $\forall x, y, z \in E$, $[(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z]$ ($\mathcal{R}$ est transitive).