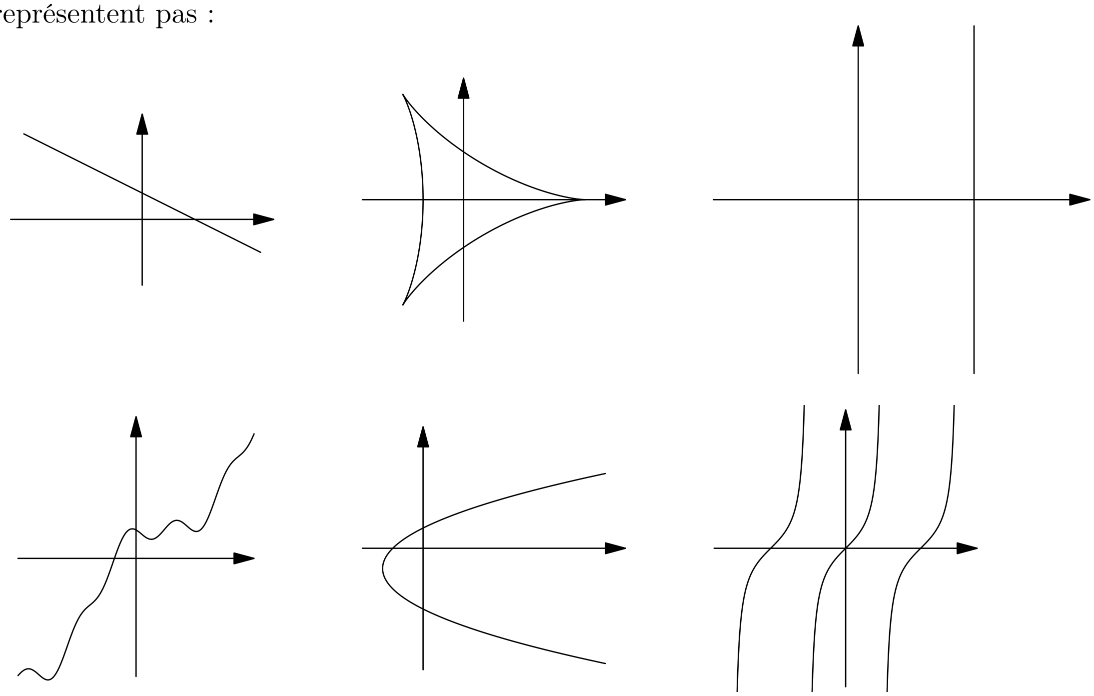
Université Clermont Auvergne — Licence 1ère année
Tronc Commun Mathématiques « augmenté » — Année 2020-2021

Feuille d'exercices n° 1 - Fonctions d'une variable réelle

Exercice 1. Parmi les graphes suivants, distinguer ceux qui représentent des fonctions de ceux qui n'en représentent pas :



Exercice 2. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{\cos(5x) - 1}{(x-4)^2}, \quad f_2(x) = \sqrt{x^2 - 25}, \quad f_3(x) = \ln(3x^2 + 5x + 2)$$

$$f_4(x) = \frac{\ln(x+1)}{\sin(\pi x)}, \quad f_5(x) = x \ln(x^2 - x) + 2, \quad f_6(x) = \sqrt{6x - x^2 - 9},$$

$$f_7(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right), \quad f_8(x) = \ln(x+1) - \ln(x-2),$$

$$f_9(x) = \sqrt{1 - \log(1+x)}, \qquad f_{10}(x) = \log\left(1 + \sqrt{1-x}\right).$$

Exercice 3. On considère les fonctions : $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = \sqrt{x}$ et $f_3(x) = x - 4$.
Donner l'ensemble de définition et l'expression des fonctions composées suivantes :

$$g_1 = f_3 \circ f_1, \qquad g_2 = f_1 \circ f_3, \qquad g_3 = f_3 \circ f_2, \qquad g_4 = f_2 \circ f_3, \qquad g_5 = f_1 \circ f_3 \circ f_2.$$

Exercice 4. Pour chacune des fonctions h ci-dessous, déterminer des fonctions f et g telles qu'on puisse écrire $h = g \circ f$:

$$h(x) = \cos(3x+1), \qquad h(x) = \sin(x^2+1) + \sqrt{x^2+1}, \qquad h(x) = e^{\frac{1}{x+1}}.$$

Dans chacun des cas, déterminer la fonction $f \circ g$.

Exercice 5. Sans utiliser de calculatrice, compléter le tableau suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	16	50	500	$\sqrt{27}$
$\log x$			$0,301$	$0,477$				$0,845$						

Exercice 6. Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

$$\ln(-2x+3) - 2\ln(x) = 0, \qquad \log\left(7000\sqrt{10^{(x^2-4)}}\right) = 2 + \log(7), \qquad (\log(x)+1)(\log(x)-2) > 0$$

$$e^{2x} + e^x - 2 > 0, \qquad \cos(x) = \frac{1}{2}, \qquad 4^x > \frac{1}{2}.$$

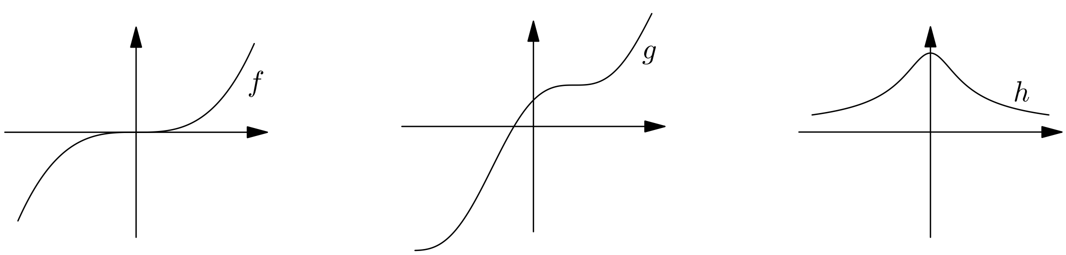
Exercice 7. Un expérimentateur fait des mesures (approximatives) d'une quantité qui décroit au cours du temps. Il pense que cette quantité suit une loi de la forme $Q(t) = C\,t^{-\gamma}$, où C et γ sont des constantes, et voudrait le vérifier.

t = temps en heures	5	12	28	43
$Q(t)$	76	$20,5$	$5,8$	3

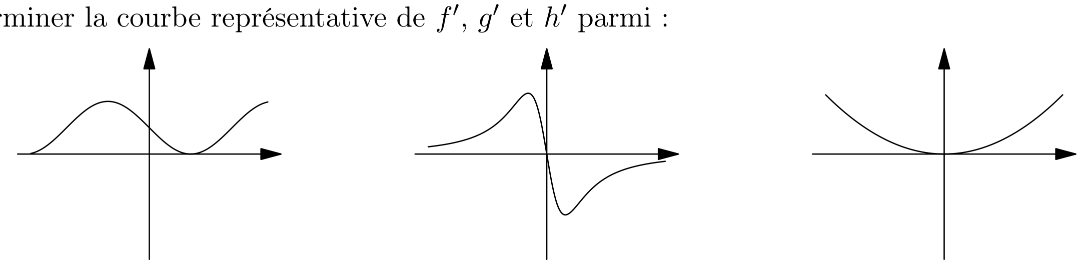
Afin d'étudier son hypothèse, il trace sur un graphique le logarithme de $Q(t)$ en fonction du logarithme du temps : $\ln(t) \longmapsto \ln(Q(t))$.

1. Pourquoi est-ce judicieux d'utiliser le logarithme ?
2. Tracer les points à l'aide du tableau de mesures. L'hypothèse qu'il a faite vous parait-elle juste ? Si oui, déterminer une valeur approximative de γ et de C.

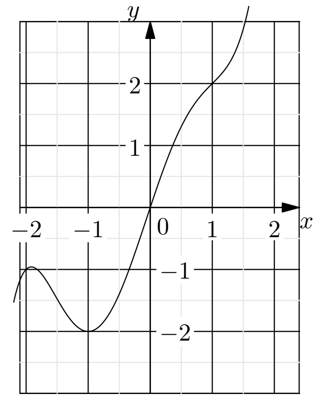
Exercice 8. Si f, g et h ont pour courbes représentatives :



déterminer la courbe représentative de f', g' et h' parmi :



Exercice 9.



On dispose ci-contre du graphe d'une fonction dérivable f.

1. Déterminer graphiquement la valeur de $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$ ainsi que celle de $f'(0)$, $f'(1)$ et $f'(-1)$.
2. Donner l'équation de la tangente au graphe aux points d'abscisse -1, 0 et 1.

Exercice 10. Déterminer la dérivée des fonctions composées suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{\sin(x)+2}, \qquad g(a) = \frac{a^2-1}{a+4}, \qquad h(t) = \cos(\omega t + \phi) \quad \text{où } \omega \text{ et } \phi \text{ sont deux réels fixés,}$$

$$i(x) = \ln(4x^2 - x - 3), \qquad j(t) = e^{-\frac{1}{1+t}}, \qquad k(u) = \sqrt{u \ln(u)}.$$

Exercice 11. Un camion doit faire un trajet de 300km. On suppose qu'il roule à vitesse constante. Sa consommation de gasoil, estimée en litres par heure, est de $\left(7,5 + \dfrac{v^2}{1080}\right)$, où v désigne sa vitesse en $\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$.

1. Exprimer la consommation totale de gasoil sur le trajet en fonction de la vitesse v du camion.
2. Quelle doit être la vitesse du camion pour que le prix du trajet soit minimal ?
3. Le prix du gasoil est de $1,40$ euros par litre. Quel est alors le prix du trajet ?

Exercice 12. On considère une plaque de carton de forme carrée, de côté a. On découpe dans chaque coin un carré de côté x (appartenant à l'intervalle $\left[0, \dfrac{a}{2}\right]$), dans le but de confectionner une boîte parallélépipédique sans couvercle.

1. Faire un dessin et déterminer en fonction de x le volume $V(x)$ de la boîte.
2. Étudier la fonction V et déterminer la valeur de x pour laquelle le volume $V(x)$ de la boîte est maximal. Que vaut ce volume lorsque $a = 3\,\mathrm{m}$?

Exercice 13. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x + 2}$.

1. Développer le produit $(x+2)(x-1)^2$.
2. En déduire l'ensemble de définition de f.
3. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f. Calculer la dérivée de f, puis dresser son tableau de variations.
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $x = 0$.

Exercices complémentaires

Exercice 14. Résoudre les équations suivantes :

$$\ln(x+1)=\ln(3x+1)-\ln(x),\qquad \ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)+\frac{1}{6}\ln\left(\frac{1}{x^3}\right)=\frac{1}{2}\ln(2),\qquad \exp(2\ln(4x^2+1))=9,$$

$$2^{2x}=4^{1-4x},\qquad 27^{x+1}=9,\qquad 9^{x^2}=3^{3x-1},\qquad (x^2+x-1)^x=1,$$

$$(x+3)^x=(4x+6)^x,\qquad (x^2-5x+7)^x=1,\qquad \log\left(2900\sqrt{e^{(x^2-3)\ln(10)}}\right)=5+\log(29).$$

Exercice 15. Résoudre les inéquations suivantes :

$$\ln(\sqrt{x})<2,\qquad \ln\left(\frac{x-1}{2x-3}\right)>0,\qquad e^{3x+1}>0,\qquad 10^{-5x+2}<1,\qquad (e^x-1)\ln(x)>0.$$

Exercice 16.

1. Le taux de natalité annuel d'un pays imaginaire est de 4% alors que le taux de mortalité annuel est de 5%. La population en l'an 2000 était d'un million d'habitants. À partir de quelle année ce pays aura-t-il moins de mille habitants ?
2. À partir de quelle année la population de ce pays aurait-elle doublée si le taux de natalité annuel avait été de 5% et le taux de mortalité annuel de 4% ?

Exercice 17. Déterminer le domaine de définition et dériver les fonctions définies par :

$$f(x)=x^{1/2}\cdot 2^x,\qquad g(x)=\sqrt{e^{2x^2+2x-4}-1},\qquad h(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega t)\quad \text{où } \omega \text{ et } \alpha \text{ sont des réels fixés.}$$

Exercice 18. Un agriculteur veut clôturer un champ rectangulaire le long d'une rivière qui coule le long d'une droite. Il ne dispose que de 1000 mètres de clôture et veut obtenir un champ d'aire maximale. Sachant qu'il n'a pas besoin de mettre une clôture le long de la rivière, quelles sont les dimensions du champ, et quelle est son aire ?

Exercice 19. Deux voitures B et C circulent en sens opposé sur une même route pendant la nuit. La route peut être décrite par le graphe de la fonction $p(x)=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{7}{4}$. Une personne se trouve au point A de coordonnées $(-2,2)$. Les voitures ont allumé leurs phares.

1. Étudier la fonction p sur l'intervalle $[-5,5]$.
2. Représenter graphiquement la situation décrite ci-dessus.
3. Depuis quels points les voitures B et C éblouissent-elles la personne se trouvant en A ?