Lista de exercício: Ortogonalidade, bases ortogonais e ortogonalização

Exercício 1. Considere em $\mathbb{R}^2$ o produto interno canônico. Para cada um dos vetores u abaixo, encontre um vetor v tal que $u \perp v$. Em seguida, calcule $\|u\|$, $\|v\|$, $\|u+v\|$, $\|u-v\|$, $\langle u, v\rangle$ e $\langle u+v, u-v\rangle$.

a) $u = (1, -1)$
b) $u = (2, -1)$
c) $u = (0, 3)$
d) $u = (1, 3)$
e) $u = (2, 6)$
f) $u = (-5, 8)$
g) $u = (-3, 0)$
h) $u = (-1, -2)$
i) $u = (1, -3)$
j) $u = (-4, -3)$
k) $u = (-1, 1)$
l) $u = (\sqrt{3}, -\sqrt{5})$

Exercício 2. Considere em $\mathbb{R}^2$ o produto interno (não-canônico) definido por

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = 3x_1x_2 + 4y_1y_2.$$

Determine uma expressão para norma induzida por esse produto interno. Depois, para cada um dos vetores u abaixo, encontre um vetor v tal que $u \perp v$ e em seguida, calcule $\|u\|$, $\|v\|$, $\|u+v\|$, $\|u-v\|$, $\langle u, v\rangle$ e $\langle u+v, u-v\rangle$.

a) $u = (1, -1)$
b) $u = (2, -1)$
c) $u = (0, 3)$
d) $u = (1, 3)$
e) $u = (2, 6)$
f) $u = (-5, 8)$
g) $u = (-3, 0)$
h) $u = (-1, -2)$
i) $u = (1, -3)$
j) $u = (-4, -3)$
k) $u = (-1, 1)$
l) $u = (\sqrt{3}, -\sqrt{5})$

Exercício 3. Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno canônico. Para cada um dos vetores u abaixo, encontre um vetor v tal que $u \perp v$. Em seguida, calcule $\|u\|$, $\|v\|$, $\|u+v\|$, $\|u-v\|$, $\langle u, v\rangle$ e $\langle u+v, u-v\rangle$.

a) $u = (1, -1, 0)$
b) $u = (2, 0, -1)$
c) $u = (0, 3, 0)$
d) $u = (0, 1, 3)$
e) $u = (2, 6, -1)$
f) $u = (-5, 2, 8)$
g) $u = (1, -3, 0)$
h) $u = (-1, 0, -2)$
i) $u = (1, -3, -3)$
j) $u = (-1, 1, -3)$
k) $u = (-1, 1, \pi)$
l) $u = (\sqrt{3}, -\sqrt{5}, \sqrt{7})$

Exercício 4. Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno (não-canônico) definido por

$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\rangle = x_1x_2 + 2y_1y_2 + z_1z_2.$$

Determine uma expressão para norma induzida por esse produto interno. Depois, para cada um dos vetores u abaixo, encontre um vetor v tal que $u \perp v$ e em seguida, calcule $\|u\|$, $\|v\|$, $\|u+v\|$, $\|u-v\|$, $\langle u, v\rangle$ e $\langle u+v, u-v\rangle$.

a) $u = (1, -1, 0)$
b) $u = (2, 0, -1)$
c) $u = (0, 3, 0)$
d) $u = (0, 1, 3)$
e) $u = (2, 6, -1)$
f) $u = (-5, 2, 8)$
g) $u = (1, -3, 0)$
h) $u = (-1, 0, -2)$
i) $u = (1, -3, -3)$
j) $u = (-1, 1, -3)$
k) $u = (-1, 1, \pi)$
l) $u = (\sqrt{3}, -\sqrt{5}, \sqrt{7})$

Exercício 5. Seja $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes reais de ordem 2 por 2 munido do produto interno canônico, o qual é dado por $\langle \cdot, \cdot\rangle : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, definida por

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right\rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}.$$

Para cada matriz A abaixo, determine uma matriz B tal que $A \perp B$. Em seguida, calcule $\|A\|$, $\|B\|$, $\|A+B\|$, $\|A-B\|$, $\langle A, B\rangle$ e $\langle A+B, A-B\rangle$.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

g) $A = \begin{pmatrix} \pi & e \\ e & \pi \end{pmatrix}$

h) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercício 6. Em cada um dos itens abaixo, indicamos um subespaço V de um espaço vetorial conhecido, munido de seu respectivo produto interno canônico. Aplique o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para obter uma base ortogonal de V.

a) $V = [(1,0,1),(1,-1,0)]$ em $\mathbb{R}^3$

b) $V = [(2,0,-1),(1,-1,0)]$ em $\mathbb{R}^3$

c) $V = [(0,1,3),(0,3,0)]$ em $\mathbb{R}^3$

d) $V = [(2,6,-1),(1,-3,0)]$ em $\mathbb{R}^3$

e) $V = [(-5,2,8),(2,6,-1)]$ em $\mathbb{R}^3$

f) $V = [(1,-3,0),(-5,2,8)]$ em $\mathbb{R}^3$

g) $V = [(1,0,2),(-2,0,1)]$ em $\mathbb{R}^3$

h) $V = [(-1,0,-2),(1,-3,-3)]$ em $\mathbb{R}^3$

i) $V = [(1,1,0,-1),(1,0,0,2)]$ em $\mathbb{R}^4$

j) $V = [(1,1,0,-1),(1,1,0,2)]$ em $\mathbb{R}^4$

k) $V = [(1,1,0,-1),(1,2,1,3),(1,1,-9,2)]$ em $\mathbb{R}^4$

l) $V = [(1,1,-1,-1),(1,2,-1,-2),(1,3,-1,-3)]$ em $\mathbb{R}^4$

m) $V = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$ em $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

n) $V = \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right]$ em $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

o) $V = \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$ em $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

p) $V = \left[\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \right]$ em $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Exercício 7. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno (não-canônico) definido como no Exercício 4, isto é,

$$\langle (x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2) \rangle = x_1x_2 + 2y_1y_2 + z_1z_2.$$

Para cada subespaço V abaixo, aplique o processo de Gram-Schmidt para encontrar uma base ortogonal de V. (Atenção ao cálculo de normas nesta situação não-canônica).

a) $V = [(1,0,1),(1,-1,0)]$ em $\mathbb{R}^3$

b) $V = [(2,0,-1),(1,-1,0)]$ em $\mathbb{R}^3$

c) $V = [(0,1,3),(0,3,0)]$ em $\mathbb{R}^3$

d) $V = [(2,6,-1),(1,-3,0)]$ em $\mathbb{R}^3$

e) $V = [(-5,2,8),(2,6,-1)]$ em $\mathbb{R}^3$

f) $V = [(1,-3,0),(-5,2,8)]$ em $\mathbb{R}^3$

g) $V = [(1,0,2),(-2,0,1)]$ em $\mathbb{R}^3$

h) $V = [(-1,0,-2),(1,-3,-3)]$ em $\mathbb{R}^3$

Exercício 8. Considere $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ com o produto interno (não-canônico) definido por

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right\rangle = a_{11}b_{11} + 2a_{12}b_{12} + 2a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}.$$

Para cada subespaço V abaixo, aplique o processo de Gram-Schmidt para encontrar uma base ortogonal de V. (Atenção ao cálculo de normas nesta situação não-canônica).

a) $V = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$ em $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

b) $V = \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right]$ em $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

c) $V = \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$ em $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

d) $V = \left[\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \right]$ em $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$