Cálculo diferencial e integral I - 2023.2

Fernando Costa Jr.

April 3, 2024

1 Máximos e mínimos 1

Definições. Seja $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função com domínio D_f. Um ponto $x_0 \in D_f$ é dito:

- *máximo global* de $f \iff f(x) \leq f(x_0), \forall x \in D_f$.
- *mínimo global* de $f \iff f(x) \geq f(x_0), \forall x \in D_f$.
- *máximo local* de $f \iff \exists I \subset D_f$ intervalo aberto, $x_0 \in I$, tal que $f(x) \leq f(x_0), \forall x \in I$.
- *mínimo local* de $f \iff \exists I \subset D_f$ intervalo aberto, $x_0 \in I$, tal que $f(x) \geq f(x_0), \forall x \in I$.

Um ponto $x \in D_f$ que é máximo ou mínimo de f é também chamado *extremo de* f, podendo ele ser global ou local.

Theorem 1.1. *Se $f : D_f \to \mathbb{R}$ é derivável em um extremo local $x_0 \in D_f$, então $f'(x_0) = 0$.*

Proof. Suponha que f acima é derivável em um máximo local $x_0 \in D_f$. Então, para $x > x_0$ suficientemente próximo de x_0, como $f(x) \leq f(x_0)$, temos

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Isso implica que

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Similarmente, para $x < x_0$ suficientemente próximo de x_0, temos $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$, o que nos dá

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Segue daí que $f'(x_0) = 0$. O mesmo argumento vale quando x_0 é mínimo local de f. □

Definição. Um ponto $x \in D_f$ tal que $f'(x) = 0$ é chamado *ponto crítico de* f.

Assim, por definição, os máximos e mínimos locais de f, quando existem, são pontos críticos. Note, porém, que nem todo ponto crítico é de máximo ou mínimo. Não obstante, os pontos críticos são os melhores candidatos a máximo/mínimo!

1.1 Método para encontrar máximos e mínimos

Apesar da demonstração não ser muito difícil, omitimos a prova do próximo teorema.

Theorem 1.2 (de Weierstrass)**.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Então f têm e atinge seus extremos absolutos no intervalo $[a, b]$, o que pode ocorrer em a ou b.*

Segue de imediato um corolário seguinte.

Corollary 1.3. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Então f atinge seus extremos globais ou em a, ou em b, ou em um extremo local em (a, b).*

O roteiro para encontrar os extremos globais de uma função derivável $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é o seguinte:

(i) Calcular $f'(x)$

(ii) Resolver $f'(x) = 0$ e encontrar os pontos críticos

(iii) Calcular $f(a), f(b)$ e $f(x)$ onde x é ponto crítico de f.

(iv) Comparar seus valores encontrados em (iii): $\begin{cases} \text{Maior valor} = \text{máximo global} \\ \text{Menor valor} = \text{mínimo global} \end{cases}$

1.2 Exemplos feitos na aula

Example 1.4. A função $f = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$ não tem extremos locais nem globais. Mesmo assim, ela é limitada inferiormente por 0.

Example 1.5. A função $f = [2, 3] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$ não tem extremos locais, mas possui mínimo global $f(2) = e^2$ e máximo global $f(3) = e^3$.

Example 1.6. Todo ponto $x \in \mathbb{R}$ é extremo da função constante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 15$.

Example 1.7. Encontre os extremos globais de $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2$ no intervalo $[-1, 3]$.

Proof. Feito em sala. □

Example 1.8. A função $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 2x + 1$ tem um mínimo global em $x = 1$ e não tem máximo global.

Example 1.9. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ possui máximo local em $x = 1$ e não possui mínimo global.

2 Teorema de Rolle e Teorema do Valor Médio

2.1 Prova dos teoremas

Theorem 2.1 (de Rolle)**.** *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *contínua em* $[a,b]$ *e derivável em* (a,b)*. Suponha que* $f(a) = f(b)$*. Então existe* $c \in (a,b)$ *tal que* $f'(c) = 0$*.*

Proof. Se f é constante, então $f'(c) = 0$ para qualquer (a,b) é a conclusão segue. Suponha que f não seja constante. Então existe $x \in (a,b)$ tal que $f(x) > f(a)$ ou $f(x) < f(a)$. Em qualquer caso, f atinge um extremo em $c \in (a,b)$, o qual deve ser extremo local. Pelo Teorema 1.1, $f'(c) = 0$. □

Theorem 2.2. *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *contínua em* $[a,b]$ *e derivável em* (a,b)*. Então existe* $c \in (a,b)$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Proof. Defina $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ por

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Então F é contínua em $[a,b]$, derivável em (a,b) e $F(a) = F(b) = 0$. Pelo Teorema de Rolle, existe $c \in (a,b)$ tal que $F'(c) = 0$. Ora,

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Assim,

$$F'(c) = 0 \implies f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \implies f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

como queíamos. □

2.2 Funções crescentes e decrescentes

Primeiramente, algumas definições.

Definições. Uma função $f : D_f \to \mathbb{R}$ é dita:

- *monótona crescente* quando $x, y \in D_f,\ x < y \implies f(x) < f(y)$;
- *monótona decrescente* quando $x, y \in D_f,\ x < y \implies f(x) > f(y)$;
- *monótona não-crescente* quando $x, y \in D_f,\ x < y \implies f(x) \geq f(y)$;
- *monótona não-decrescente* quando $x, y \in D_f,\ x < y \implies f(x) \leq f(y)$;
- *monótona* quando é uma das quatro opções anteriores.

O TVM pode ser utilizado para obter o importante resultado abaixo.

Theorem 2.3. *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *contínua em* $[a,b]$ *e derivável em* (a,b)*.*

(*i*) *Se* $f'(x) > 0$ *para todo* $x \in (a,b)$ *então* f *é crescente em* $[a,b]$*.*

(ii) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$ então f é decrescente em $[a, b]$.

Proof. Mostremos o item (i). Suponha que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$. Dados $x, y \in (a, b)$ com $x < y$, temos que $f : [x, y] \to \mathbb{R}$ é contínua e derivável em $[x, y]$. Pelo TVM, existe $c \in (x, y)$ tal que $f'(c) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Visto que $f'(c) > 0$, segue que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) > 0 \implies \frac{f(y) - f(x)}{y - x} > 0 \implies f(y) - f(x) > 0 \implies f(x) < f(y).$$

Logo, f é crescente. A prova do item (ii) é análoga à do item (i). □

Isso nos permite estabelecer o seguinte roteiro para o estudo dos intervalos de crescimento e decrescimento de uma função derivável $f : D_f \to \mathbb{R}$.

- Calcular a derivada f' em D_f
- Considerar $f'(x) = 0$ e encontrar os pontos críticos de f
- Quebrar a análise em intervalos determinados pelos pontos críticos de f
- Estudar o sinal de f' no interior dos intervalos considerados (o gráfico de f' pode ajudar)

2.3 Exemplos feitos em aula

Example 2.4. Estudar o crescimento e o decrescimento da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5$.

Example 2.5. Mostrar que, no intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, têm-se $\sin(x) < x$.

Example 2.6. Mostrar que $e^x \geq x + 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.