Taxa de variação

▶ Exerícios

1. Uma partícula se move de modo que, no instante t, a distância percorrida é dada por

$$s(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^2 - 3t.$$

   (a) Que expressões fornecem a velocidade e a aceleração? (resp.: $v = t^2 - 2t - 3,\ a = 2t - 2$)

   (b) Em que instante a velocidade é zero? (resp.: $t = 3$)

   (c) Em que instante a aceleração é zero? (resp.: $t = 1$)

2. Uma partícula move-se sobre a parábola $y = x^2$, com coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ deriváveis e $\dot{x} \neq 0$. Em que ponto da parábola as coordenadas deslocam-se à mesma taxa? (resp.: $P(1/2, 1/4)$)

3. Um ponto move-se ao longo da curva $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ e sua abscissa x varia a uma velocidade constante de 3 cm/s. Qual será a velocidade da ordenada y, quando $x = 2$ cm? (resp.: $-12/25\, cm/s$)

4. Um ponto move-se sobre a parábola $y = 3x^2 - 2x$. Supondo-se que suas coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ são funções deriváveis e que $x'(t) \neq 0$, em que ponto da parábola a velocidade da ordenada y será o triplo da velocidade da abscissa x? (resp.: $P(5/6, 5/12)$)

5. Um cubo se expande de modo que sua aresta varia à razão de $12,5$ cm/s. Qual a taxa de variação de seu volume, no instante em que a aresta atingir 10 cm de comprimento? (resp.: $3750\, cm^3/s$)

6. O raio de uma esfera cresce à razão de $2,5 cm/s$. Quão rapidamente varia seu volume no instante em que o raio mede $7,5cm$? (o volume da esfera de raio r é $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$). (resp.: $562.5\,\pi\, cm^3/s$)

7. Sejam x e y os catetos de um triângulo retângulo e θ o ângulo oposto a y. Supondo-se que $x = 12$ e que θ decresce à razão de $1/30\ \mathrm{rad}/s$, calcule $y'(t)$, quando $\theta = \pi/3\ \mathrm{rad}$. (resp.: $-1.6\mathrm{unid}/s$)

8. Uma escada de 8 m está encostada em uma parede vertical. Se a extremidade inferior da escada for afastada do pé da parede a uma velocidade constante de 2 m/s, com que velocidade a extremidade superior estará descendo no instante em que a inferior estiver a 3 m da parede? (resp.: $-6/\sqrt{55}\, m/s$)

9. Uma viga medindo 30 m de comprimento está apoiada em uma parede e o seu topo está se deslocando a uma velocidade de $0,5\ m/s$. Qual a taxa de variação da medida do ângulo formado pela viga e pelo chão, quando a topo da viga estiver a uma altura de 18 m? (resp.: $-1/48\,\mathrm{rad}/s$)

10. A Lei de Boyle para a dilatação dos gases é dada pela equação $PV = C$, onde P é a pressão, medida em Newtons por unidade de área, V é o volume e C é uma constante. Num certo instante, a pressão é de 3.000 N/m^2, o volume é de 5 m^3 e está crescendo à taxa de 2 $m^3/\min$. Qual a taxa de variação da pressão nesse instante? (resp.: $-1200\, N/m^2$)

11. Expresse a taxa de crescimento do volume V de uma esfera, relativa à superfície S, em função do raio r da esfera. Faça o mesmo para o raio, em relação ao volume. (resp.: $\frac{dV}{dS} = r/3$ e $\frac{dr}{dV} = \frac{1}{4\pi r^2}$)

12. Um balão sobe verticalmente com uma velocidade v e um observador, a certa distância d, vê o balão sob um ângulo de elevação θ. Expresse a taxa $\dot{\theta}$ de variação de θ em termos de v, θ e d. Qual a velocidade do balão se $d = 500\ m$ e $\dot{\theta} = 0,02\ \mathrm{rad}/s$ e $\theta = \pi/4$ rad. (resp.: $\frac{v\cos^2\theta}{d}$ e $v = 20\, m/s$)

13. Uma bola de neve derrete a uma taxa volumétrica $V'(t)$ proporcional à sua área. Mostre que o seu raio r decresce a uma taxa $r'(t)$ constante.

14. Um reservatório cônico, com vértice para baixo, contém água de volume V até uma altura h. Supondo que a evaporação da água se processa a uma taxa $\dot{V}$ proporcional à sua superfície, mostre que h decresce a uma taxa $\dot{h}$ constante

15. Uma piscina está sendo esvaziada de tal forma que $V(t) = 300(20-t)^2$ representa o número de litros de água na piscina t horas após o início da operação. Calcule a velocidade (instatânea) de escoamento da água ao cabo de 8 horas e a velocidade média desse escoamento no mesmo tempo.

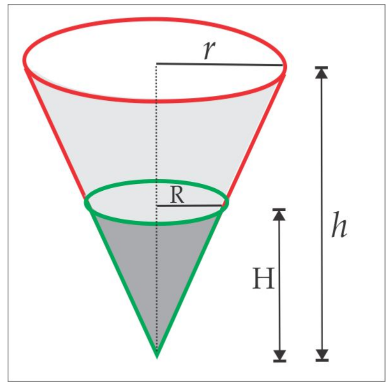
16. Uma estátua de altura h está sendo instalada sobre um pedestal de altura l acima do plano horizontal que passa pelo olho de um observador. Com o observador a uma distância x, calcule a

taxa de variação, em relação a x, do ângulo θ sob o qual o observador vê a estátua, em termos de $h,\ l$ e x. Qual o valor dessa taxa se $h = 20,\ l = 5$ e $x = 50$?

17. A figura ilustra um reservatório cônico de altura $h = 10m$ e raio $r = 4m$ contendo água, que escoa a uma vazão de $5m^3/hora$.

    (a) Qual a relação entre as variáveis R e H?

    (b) A que taxa o nível da água diminui, quando $H = 6m$?



18. *Um cilindro circular reto, ao ser aquecido, tem seu diâmetro e sua altura aumentados às taxas de* $2\ cm/s$ *e* $5\ cm/s$*, respectivamente. Determine a taxa de variação de seu volume, no instante em que sua altura atingir* $20\ cm$ *e seu diâmetro for de* $8\ cm$*.* (resp.: $240\pi\ cm^3/s$)