

Lista de exercícios 10 - Interseções, ângulos, distâncias

Exercício 1. Determinar a posição relativa dos pares de retas abaixo, sua interseção (caso exista) e seu ângulo. Se as retas forem coplanares escrever a equação do plano que as contém. Se as retas forem reversas, escrever a equação do plano que contém uma delas e é paralelo à outra.

$$(a) \quad r_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}; \quad r_2 : \begin{cases} x = 7 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$(b) \quad r_1 : \frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{-4}; \quad r_2 : \frac{x-1}{9} = \frac{y-2}{6} = \frac{z+3}{-6}.$$

$$(c) \quad r_1 : \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -3t \\ z = 1 + 4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad r_2 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 4t \\ z = 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$(d) \quad r_1 : \begin{cases} x = 2 + 6t \\ y = -1 + 4t \\ z = 3 - 4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad r_2 : \begin{cases} x = 8 + 9t \\ y = 3 + 6t \\ z = -1 - 6t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exercício 2. Determinar a posição relativa dos planos dados, sua interseção, caso exista, e seu ângulo.

$$(a) \quad \pi_1 : 2x + 3y + 3z - 5 = 0 \text{ e } \pi_2 : -4x - 6y - 6z + 2 = 0$$

$$(b) \quad \pi_1 : 3x - y + 3z - 9 = 0 \text{ e } \pi_2 : 2x - 32y + 2z = 6$$

$$(c) \quad \pi_1 : 6x + 3y - 2z = 0 \text{ e } \pi_2 : x + 2y + 6z = 12$$

Exercício 3. Determine, em cada caso, a posição relativa, sua interseção (caso exista) e o ângulo entre a reta r e o plano π .

$$(a) \quad r : x = -2 + 3t, y = 1 - 4t, z = -5 + 4t \text{ e } \pi : 4x - 3y - 6z = 5.$$

$$(b) \quad r : x = 0, y = -t, z = -1 + t \text{ e } \pi : 2x - y - z = 1.$$

$$(c) \quad r : x - 1 = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6} \text{ e } \pi : 2x + 3y + z - 3 = 0$$

Em cada item abaixo, determine a posição relativa dos planos.

$$(a) \quad \pi_1 = 2x + y - 2z - 10 = 0, \quad \pi_2 = 3x + 2y + 2z - 1 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_3 = 5x + 4y + 3z - 4 = 0$$

$$(b) \quad \pi_1 : x + 2y - 3z - 6 = 0, \quad \pi_2 : 2x - y + 4z - 2 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_3 : 4x + 3y - 2z - 14 = 0$$

$$(c) \quad \pi_1 : x + y - z - 1 = 0, \quad \pi_2 : 2x + 3y - 3z - 3 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_3 : x - 3y + 3z - 2 = 0$$

Exercício 4. Determine se as retas abaixo são paralelas, coincidentes, concorrentes ou reversas. Calcule seu ponto de interseção (se existir), e o ângulo entre elas.

$$(a) \quad r_1 : x = 1, y = t, z = 1 \quad \text{e} \quad r_2 : x = t, y = 0, z = 1$$

$$(b) \quad r_1 : x - 3 = \frac{z-2}{7}; y = 4 \quad \text{e} \quad r_2 : \frac{x-6}{2} = \frac{z-4}{14}; y = 8.$$

$$(c) \quad r_1 : x = 1 + 3t, y = 2 + 5t, z = 1 + 7t \quad \text{e} \quad r_2 : x = 7 + 6t, y = 12 + 10t, z = 6 + 14t.$$

$$(d) \quad r_1 : x + 1 = \frac{y-1}{2}; z = 5 \quad \text{e} \quad r_2 : x = 1 + 4n, y = 5 + 2n, z = 2 + 3n.$$

$$(e) \quad r_1 : x = 1, y = 3 - t, z = 5 + 2t \quad \text{e} \quad r_2 : x = 4t - 4, y = 2t + 3, z = 3t - 2.$$

Exercício 5. Determine as posições relativas das retas r e os planos π abaixo. Obtenha seu ponto comum (se existir) e seu ângulo.

- (a) $r : x = -8 + 15t, y = 5 - 9t, z = 0$ e $\pi : 3x + 5y - 1 = 0$
 (b) $r : x = 5 - 2s, y = 1 - s + 4t, z = 2 + s - 2t$
 (c) $r : x = 2 - t, y = 1 + 2t, z = 1 + t$ e $\pi : x = 1 - s - 4t, y = -2 + 2s - 8t, z = 1 + s - t$
 (d) $r : P = (1, 2, 3) + t(2, -1, 1)$ e $\pi : x - 2y - 4z + 5 = 0$.

Exercício 6. Determine a posição relativa dos planos abaixo, sua interseção e ângulo:

- (a) $2x + y - z - 1 = 0$ e $3x - 5y + z = 4$
 (b) $x + 2y + 3z = 1$ e $2x + 4y = 2 - 6z$
 (c) $2x - 2y + 6z = 6$ e $x = -3s - t, y = -t, z = s$
 (d) $3x + 6y = 27 - 3z$ e $2x + 4y + 2z = 14$.

Exercício 7. Achar as interseções da reta $r : \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{5} = 2 - z$ com os planos coordenados. Essa reta intercepta algum eixo coordenado?

Exercício 8. Ache as interseções do plano $3x + 2y - z = 5$ com os planos e os eixos coordenados.

Exercício 9. Dada a reta $r : \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+3}{2}$ e o plano $\pi : x - 3y + 6z + 7 = 0$, determine os valores de m para que:

- (a) r seja paralela a π , mas $r \cap \pi = \emptyset$
 (b) r esteja contida em π
 (c) r intercepte π em um único ponto

Exercício 10. Determine as distâncias dos pontos $A = (1, -1, 4)$ e $B = (6, -3, -1)$ à reta $r : \frac{x-2}{4} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{-2}$.

Exercício 11. Calcule as distâncias dos pontos $R = (1, 1, -1)$ e $S = (1, 1, 1)$ ao plano $\pi : 2x - y + z = 2$.

Exercício 12. Calcule a distância entre as retas $r_1 : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$ e $r_2 : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$

Exercício 13. Ache a distância entre as retas $r_1 : \frac{x-3}{6} = \frac{y+4}{4} = \frac{z-1}{-4}$ e $r_2 : \frac{x-1}{9} = \frac{y-1}{6} = \frac{z+3}{-6}$.

Exercício 14. Ache a distância do ponto $A = (1, 2, 2)$ ao plano determinado pelos pontos $B = (-1, 0, 0)$, $C = (1, 0, 1)$ e $D = (-2, 3, 0)$.

Exercício 15. Calcule a distância do ponto $D = (-2, 3, 0)$ à reta que passa por $P_0 = (1, 2, 5)$ e é paralela à reta que contém os pontos $A = (3, 0, 1)$ e $B = (-1, 2, 1)$.

Exercício 16. Calcule a distância entre a interseção dos planos $\pi_1 : x + y - z = -2$, $\pi_2 : 2x - y + z = 5$ e $\pi_3 : x + y = 2z - 4$ e a reta $r : x = 1 + 2t, y = -t, z = 2 - 3t$.

Exercício 17. Escreva as equações da reta que pertence ao plano $\pi : x - y + z = 7$, contém o ponto $(3, -3, 1)$ e é ortogonal à reta $x = 1 + t, y = 1 + 2t, z = 1 + 3t$.

Exercício 18. Mostre que os planos $\pi_1 : x + y - z = 0$ e $\pi_2 : 2x - y + 3z - 1 = 0$ se interceptam segundo uma reta r . Ache a equação do plano π que passa pelo ponto $B = (1, 0, -1)$ e contém a reta r .