

Lista de exercícios 6

Produto interno

Exercício 1. Verifique que as propriedades de produto interno são verificadas pelos produtos internos canônicos de \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 .

Exercício 2. Determine se o vetor $\vec{w} = (5, 7)$ pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores $\vec{u} = (1, 2)$ e $\vec{v} = (2, 1)$.

Exercício 3. Determine se o vetor $\vec{w} = (3, -1, 2)$ pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores $\vec{a} = (1, 0, 1)$ e $\vec{b} = (0, 1, 0)$.

Exercício 4. Encontre a projeção ortogonal do vetor $\vec{a} = (3, 4)$ sobre o vetor $\vec{b} = (1, 2)$.

Exercício 5. Encontre a projeção ortogonal do vetor $\vec{a} = (2, 3, 4)$ sobre o vetor $\vec{b} = (1, 1, 0)$.

Exercício 6. Calcule a distância entre os pontos $P(1, 2)$ e $Q(4, 6)$.

Exercício 7. Calcule a distância entre os pontos $P(1, -1, 2)$ e $Q(4, 2, -1)$.

Exercício 8. Dados $\vec{a} = (2, 1, -2)$, $\vec{b} = (3, 3, 0)$, $\vec{c} = (-1, -2, -2)$ e $\vec{d} = (2, 3, 1)$, calcule os ângulos entre \vec{a} e \vec{b} , entre \vec{a} e \vec{c} , e entre \vec{b} e \vec{d} .

Exercício 9. Se \vec{u} e \vec{v} são vetores quaisquer, verifique que $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ e $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

Exercício 10. Usando o Cálculo Vetorial, demonstre o Teorema de Pitágoras. (Dica: se interpretarmos os catetos do triângulo como dois vetores \vec{u} e \vec{v} , então a hipotenusa é $\vec{u} - \vec{v}$).

Exercício 11. Prove que as diagonais de um losango são perpendiculares.

Exercício 12. Dados \vec{u} e \vec{v} vetores quaisquer, verifique as seguintes propriedades:

(a) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

(b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$

(c) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$

(d) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

Exercício 13. Sejam \vec{u} e \vec{v} dois vetores perpendiculares entre si e seja \vec{w} um outro vetor. Suponha que os ângulos entre \vec{u} e \vec{w} seja de $\frac{\pi}{3}$ radianos e que o ângulo entre \vec{v} e \vec{w} também seja de $\frac{\pi}{3}$ radianos. Sabendo que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 5$ e $\|\vec{w}\| = 8$, calcule $(3\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (\vec{v} + 3\vec{w})$.

Exercício 14. Sejam \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} vetores tais que o ângulo entre dois quaisquer deles, nessa ordem, é de $\pi/3$ radianos. Sabendo que $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 2$ e $\|\vec{w}\| = 6$, calcule $\|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\|$.

Exercício 15. Sabendo que $\|\vec{u}\| = 11$, $\|\vec{v}\| = 23$ e $\|\vec{u} - \vec{v}\| = 30$, determine $\|\vec{u} + \vec{v}\|$.

Exercício 16. Sejam \vec{u} , \vec{v} vetores perpendiculares tais que $\|\vec{u}\| = 5$ e $\|\vec{v}\| = 12$. Calcule $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ e $\|\vec{u} - \vec{v}\|$.

Exercício 17. Determine um vetor unitário paralelo ao vetor $2\vec{a} - \vec{b}$, sendo $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ e $\vec{b} = 2\vec{i} - 1\vec{j} + 3\vec{k}$.

Exercício 18. Encontre x tal que os vetores $\vec{a} = x\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ e $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ são

perpendiculares.

Exercício 19. Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores tais que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$, $\|\vec{v}\| = 3\sqrt{2}$ e o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} seja $\theta = \frac{\pi}{4}$. Calcule $\|\vec{u}\|$ e $\|\vec{u} + \vec{v}\|$.

Exercício 20. Ache o valor de x tal que $(x, 3, 1) \cdot (2, 1, 0) = 3$.

Exercício 21. Ache um vetor unitário na direção da bissetriz do ângulo entre $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{v} = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

Exercício 22. Os pontos $A = (1, 1, 0)$, $B = (3, 1, 0)$ e $C = (1, 3, 0)$ são vértices de um triângulo? Este triângulo é retângulo? É isósceles? Calcule seus ângulos.

Exercício 23. Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores l.d. Determine a projeção de \vec{u} sobre \vec{v} .

Exercício 24. Determine a projeção de $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ sobre $\vec{v} = \vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k}$.

Exercício 25. Um vetor \vec{v} forma com os eixos Ox e Oy os ângulos $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ e $\beta = \frac{\pi}{4}$, respectivamente. Qual é o ângulo entre \vec{v} e Oz ?

Exercício 26. Sejam os vetores $\vec{u} = \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{w} = \vec{i} + \vec{k}$. Verifique se $\mathfrak{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma base ortonormal. É possível determinar as coordenadas do vetor $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ na base ordenada \mathfrak{B} ?

Exercício 27. Sejam os vetores $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k})$, $\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{k})$ e $\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})$. Verifique se $\mathfrak{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ é uma base ortonormal. É possível determinar as coordenadas do vetor $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ na base ordenada \mathfrak{B} ?

Exercício 28. Sejam os vetores $\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$, $\vec{v} = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$ e $\vec{w} = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$. Verifique se $\mathfrak{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma base ortonormal. É possível determinar as coordenadas do vetor $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ na base ordenada \mathfrak{B} ?

Exercício 29. Para dois vetores quaisquer \vec{u} e \vec{v} , verifique que vale a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\|\vec{u} \cdot \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|.$$