

## Lista de exercícios 7

### Produtos vetorial e misto

**Exercício 1.** Determine um vetor de norma 3 que seja ortogonal aos vetores  $\vec{a} = (2, -1, 1)$  e  $\vec{b} = (1, 0, -1)$ .

**Exercício 2.** Verifique se os pontos  $A = (1, 2, 1)$ ,  $B = (3, 0, 4)$  e  $C = (5, 1, 3)$  são vértices de um triângulo e, em caso afirmativo, calcule sua área.

**Exercício 3.** Dados os vetores  $\vec{a} = (2, 1, -2)$ ,  $\vec{b} = (2, -1, 3)$  e  $\vec{c} = (1, 2, -1)$ , calcule  $\vec{a} \times \vec{b}$ ,  $\vec{c} \times \vec{a}$  e  $(\vec{b} \times \vec{c}) + (\vec{c} \times \vec{b})$ .

**Exercício 4.** Dados os vetores  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$  e  $\vec{b} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ , determine um vetor unitário perpendicular a  $\vec{a}$  e a  $\vec{b}$ .

**Exercício 5.** Encontre um vetor  $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  tal que  $\vec{v} \cdot (2\vec{i} + 3\vec{j}) = 6$  e  $\vec{v} = (2\vec{i} + 3\vec{j}) = 4\vec{k}$ .

**Exercício 6.** Calcule a área do paralelogramo que tem três vértices consecutivos nos pontos  $A = (1, 0, 1)$ ,  $B = (2, 1, 3)$  e  $C = (3, 2, -5)$ .

**Exercício 7.** Os pontos  $A = (-1, -3, 4)$ ,  $B = (-2, 1, -4)$ ,  $C = (3, -11, 5)$  são vértices de um triângulo? Esse triângulo é isósceles? É retângulo? É equilátero? Calcule sua área, e explique cada resposta.

**Exercício 8.** Dados  $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ ,  $\vec{v} = 4\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ , determine uma base ortonormal  $\mathfrak{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  com  $\vec{a}$  paralelo a  $\vec{u}$  e  $\vec{b}$  paralelo a  $\vec{v}$ . Obtenha o vetor  $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$  como combinação linear dos vetores da base  $\mathfrak{B}$ .

**Exercício 9.** Verificar que os vetores  $\vec{a} = \vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$  e  $\vec{c} = \vec{i} + \vec{k}$  formam uma base de  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercício 10.** Determine  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $\vec{a} = (3, 5, 1)$ ,  $\vec{b} = (2, 0, 4)$  e  $\vec{c} = (1, x, 3)$  sejam coplanares.

**Exercício 11.** Dados  $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$ ,  $\vec{w} = -2\vec{j} - \vec{k}$ , calcule  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ ,  $[\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]$  e  $[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}]$ .

**Exercício 12.** Os vetores  $\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ ,  $2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$ ,  $4\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$  são coplanares? Justifique.

**Exercício 13.** Calcule o volume do paralelepípedo que tem um dos vértices no ponto  $A = (2, 1, 6)$  e os três vértices adjacentes nos pontos  $B = (4, 1, 3)$ ,  $C = (1, 3, 2)$  e  $D = (1, 2, 1)$ .

**Exercício 14.** Verifique, em cada caso, se os pontos são coplanares:

(a)  $A = (0, 2, -2)$ ,  $B = (-1, 0, -2)$ ,  $C = (-2, -1, -3)$ ,  $D = (1, 1, 1)$

(b)  $A = (-1, 0, 3)$ ,  $B = (-1, -2, 2)$ ,  $C = (1, 0, 2)$ ,  $D = (2, 4, 1)$

**Exercício 15.** Determine  $x$  de modo que  $\vec{a} = (1, x, 0)$ ,  $\vec{b} = (-x, -1, 1)$  e  $\vec{c} = (1, 1, 1)$  não sejam coplanares.

**Exercício 16.** Dados  $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$  e  $\vec{v} = \vec{i} + 3\vec{j}$ , determine uma base ortonormal  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ , com  $\vec{a}$  paralelo a  $\vec{u}$  e  $\vec{b}$  coplanar com  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

**Exercício 17.** Calcule o ângulo entre  $2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$  e  $-\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ . Eles são l.i. ou l.d.?

**Exercício 18.** Considere o triângulo cujos vértices são os pontos  $A = (3, 2, 1)$ ,  $B = (3, 2, 2)$  e  $C = (3, 3, 2)$ . Determine:

- (a) Os ângulos do  $\Delta ABC$ .
- (b) O vetor projeção do menor lado sobre o maior lado.
- (c) A altura do triângulo, relativa ao maior lado.
- (d) A área do triângulo  $\Delta ABC$ .
- (e) O volume do paralelepípedo gerado pelos vetores  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  e  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ .

**Exercício 19.** Dados  $\vec{a} = 2x\vec{i} + 2x\vec{j} + x\vec{k}$ ,  $\vec{b} = x\vec{i} - 2x\vec{j} + 2x\vec{k}$  e  $\vec{c} = 2x\vec{i} - x\vec{j} - 2x\vec{k}$ , mostre que  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  é base se ortogonal se  $x \neq 0$ . Para quais valores de  $x$  o conjunto  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  é base ortonormal? Encontre as coordenadas do vetor  $\vec{v} = (1, -2, -3)$  na base ortonormal obtida.

**Exercício 20.** Os pontos  $A = (4, 6, 2)$ ,  $B = (1, 2, 1)$ ,  $C = (3, 3, 3)$  e  $D = (7, 4, 3)$  podem ser vértices de um paralelepípedo? Em caso afirmativo, calcule o volume do sólido considerado, as coordenadas do ponto  $E$ , sendo  $AE$  uma diagonal interna.

**Exercício 21.** Sejam  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  vetores tais que o ângulo entre dois qualquer deles na ordem dada é  $\frac{\pi}{3}$  radianos. Supondo que  $\|\vec{a}\| = 4$ ,  $\|\vec{b}\| = 2$  e  $\|\vec{c}\| = 6$ , calcule  $\|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\|$ .

**Exercício 22.** Use o produto vetorial para determinar as condições que devem satisfazer os vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  para que  $\vec{a} + \vec{b}$  e  $\vec{a} - \vec{b}$  sejam paralelos.