Lista de exercícios 1
Números naturais e enumerabilidade

*(Os exercícios marcados com * são os mais pertinentes).*

Exercício 1* Usando indução, mostre:

a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2$

Exercício 2 (Divisão euclidiana) Dados $m, n \in \mathbb{N}$ com $n > m$, prove que ou n é múltiplo de m ou existem $q, r \in \mathbb{N}$ tais que $n = mq + r$ e $r < m$. Prove que q e r são únicos com esta propriedade.

Exercício 3 Seja $X \subset \mathbb{N}$ um subconjunto não-vazio tal que $m, n \in X \Leftrightarrow m, m + n \in X$. Prove que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que X é o conjunto dos múltiplos de k.

Exercício 4* Indicando com $\operatorname{card} X$ o número de elementos do conjunto finito X, prove que:

a) Se X é finito e $Y \subset X$, então $\operatorname{card} Y \leq \operatorname{card} X$.

b) Se X e Y são finitos, então $X \cup Y$ é finito e

$$\operatorname{card}(X \cup Y) = \operatorname{card} X + \operatorname{card} Y - \operatorname{card}(X \cap Y).$$

c) Se X e Y são finitos, então $X \times Y$ é finito e

$$\operatorname{card}(X \times Y) = \operatorname{card} X \cdot \operatorname{card} Y.$$

Exercício 5 Seja $\mathcal{P}(X)$ o conjunto cujos elementos são os subconjuntos de X. Prove por indução que, se X é finito, então $\mathcal{P}(X) = 2^{\operatorname{card} X}$.

Exercício 6 Seja $\mathcal{F}(X; Y)$ o conjunto das funções $f : X \to Y$. Se $\operatorname{card} X = m$ e $\operatorname{card} Y = n$, prove que $\operatorname{card} \mathcal{F}(X; Y) = n^m$.

Exercício 7* Prove que todo cojunto finito não-vazio X de números naturais contém um elemento máximo (isto é, existe $x_0 \in S$ tal que $x \leq x_0$ para todo $x \in X$).

Exercício 8 Prove o Princípio das Casas dos Pombos: se $m > n$, não existe função injetiva $f = I_m \to I_n$ (isto é, quando $m > n$, para alojar m pombos em n casas é preciso que pelo menos uma casa abrigue mais de um pombo).

Exercício 9* Dados X, Y conjuntos e $f : X \to Y$, prove:

a) Se X é infinito e f é injetiva, então Y é infinito.

b) Se Y é infinito e f é sobrejetiva, então X é infinito.

Exercício 10* Sejam X um conjunto finito e Y um conjunto infinito. Prove que existem uma função injetiva $f : X \to Y$ e uma função sobrejetiva $g : Y \to X$.

Exercício 11 Prove que o conjunto $\mathcal{P}$ dos números primos é infinito.

Exercício 12* Dê exemplo de uma sequência decrescente $X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \cdots$ de conjuntos infinitos cuja interseção $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ seja vazia.

Exercício 13* Defina $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ pondo $f(1, n) = 2n - 1$ e $f(m + 1, n) = 2^m(2n - 1)$. Prove que f é uma bijeção.

Exercício 14 Prove que existe $g = \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sobrejetiva tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $g^{-1}(n)$ é infinito.

Exercício 15* Exprima $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2 \cup \cdots \cup \mathbb{N}_n \cup \cdots$ como união infinita de subconjuntos infinitos, dois a dois disjuntos.

Exercício 16 Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\mathcal{P}_n = \{X \subset \mathbb{N} : \operatorname{card} X = n\}$. Prove que $\mathcal{P}_n$ é enumerável. Conclua que o conjunto $\mathcal{P}_f$ dos subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ é enumerável.

Exercício 17 Prove que o conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ de todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$ não é enumerável.

Exercício 18 Sejam Y enumerável e $f : X \to Y$ tal que, para cada $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ é enumerável. Prove que X é enumerável.