Lista de exercícios 10
Integrais

(Os exercícios marcados com (*) são os mais pertinentes).

Exercício 1 (*). Defina $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ponto $f(0) = 0$ e $f(x) = 1/2^n$ se $1/2^{n+1} < x \leq 1/2^n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Prove que f é integrável e calcule $\int_0^1 f(x)dx$.

Exercício 2 (*). Seja $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ integrável. Se f é uma função ímpar, prove que $\int_{-a}^{a} f(x)dx{=}0$. Se, porém, f é par, prove que $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

Exercício 3. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida pondo $f(x) = 0$ se x é irracional e $f(x) = 1/q$ se $x = p/q$ é uma fração irredutível e $q > 0$ (Ponha $f(0) = 1$ caso $0 \in [a,b]$.) Prove que f é contínua apenas nos pontos irracionais de $[a,b]$, que é integrável e que $\int_a^b f(x)dx = 0$.

Exercício 4 (*). Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável, com $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Se f é contínua no ponto $c \in [a,b]$ e $f(c) > 0$, prove que $\int_a^b f(x)dx > 0$.

Exercício 5 (*). Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida pondo $f(x) = x$ quando x é racional e $f(x) = x + 1$ quando x é irracional. Calcule as integrais (inferior e superior) de f. Usando uma função integrável $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ em vez de x, defina agora $\phi(x) = g(x)$ se x é racional e $\phi(x) = g(x){+}1$ se x é irracional. Calcule as integrais (inferior e superior) de ϕ em termos da integral de g.

Exercício 6 (*). Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável. Prove que a função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ é Lipschitz.

Exercício 7 (*). Prove que, se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sao integráveis, então também são integráveis as funções $\phi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ definidas por $\phi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ e $\psi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$. Conclua daí que, se f é integrável, também são integráveis as funções $f_+, f_- : [a,b] \to \mathbb{R}$ definidas por $f_+(x) = f(x)$ se $f(x) > 0$ e $f_+(x) = 0$ se $f(x) \leq 0$, $f_-(x) = f(x)$ se $f(x) < 0$ e $f_-(x) = 0$ se $f(x) \geq 0$.

Exercício 8. Prove que a desigualdade de Schwarz para integrais: se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são contínuas, então

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \leq \int_a^b f(x)^2 dx \cdot \int_a^b g(x)^2 dx.$$

Exercício 9. Seja D o conjunto dos pontos de descontinuidade de uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Se o conjunto D' dos pontos de acumulação de D é enumerável, prove que f é integrável.

Exercício 10. Uma função limitada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, que se anula fora de um conjunto de medida nula, pode não ser integrável. Nestas condições, supondo f integrável, prove que sua integral é igual a zero.

Exercício 11. Diz-se que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tem *conteúdo nulo* quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, exite uma cobertura finita $X \subset I_1 \cup \cdots \cup I_k$, onde cada I_j é um intervalo aberto, com $\sum_{j=1}^{k} |I_j| < \varepsilon$. Prove:

(a) Se X tem conteúdo nulo, o mesmo ocorre com seu fecho $\overline{X}$.

(b) Existem conjuntos de medida nula que não têm conteúdo nulo.

(c) Um conjunto compacto tem medida nula se, e somente se, tem conteúdo nulo.

(d) Se uma função limitada $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ coincide com uma função integrável $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ exceto num conjunto de conteúdo nulo, prove que g é integrável e sua integral é igual à de f.

Exercício 12. Se um conjunto $X \subset [a,b]$ não tem medida nula, então existe $\varepsilon > 0$ tal que, para toda partição P de $[a,b]$, a soma dos comprimentos dos intervalos de P que contêm pontos de X em seu interior é maior do que ε.

Exercício 13. Seja $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função positiva, isto é, $\phi(x) > 0$ para todo $x \in [a,b]$. Mostre que existe $\alpha > 0$ tal que o conjunto $X = \{x \in [a,b] : \phi(x) \geq \alpha\}$ não tem medida nula.

Exercício 14. Se a função $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ é positiva e integrável, então $\int_a^b \phi(x)dx > 0$. Conclua que, se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são integráveis e $f(x) < g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, então $\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$. *(Dica: use os dois exercícios anteriores).*

Exercício 15 (*)**.** Seja $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável, com $p(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Prove que, se $\int_a^b p(x)dx = 0$, então o conjunto dos pontos $x \in [a,b]$ tais que $p(x) = 0$ é denso em $[a,b]$. Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é qualquer função integrável que se anula num conjunto denso de pontos em $[a,b]$, prove que $\int_a^b f(x)dx = 0$.

Exercício 16 (*)**.** Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável, contínua à direita no ponto $x_0 \in [a,b)$. Prove que $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ é derivável à direita no ponto x_0, com $F'_+(x_0) = f(x_0)$. Enuncie fato análogo com 'èsquerda" no lugar de "direita". Dê exemplos com f integrável, descontínua no ponto x_0, nos quais:

(a) existe $F'(x_0)$

(b) não existe $F'(x_0)$

Exercício 17 (*)**.** Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivável, com f' integrável. Prove que, para quaisquer $x, c \in [a,b]$, tem-se $f(x) = f(c) + \int_c^x f'(t)dt$.

Exercício 18. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivável, com $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Se o conjunto $\{x \in [a,b] : f'(x) = 0\}$ tem conteúdo nulo, prove que f é crescente.

Exercício 19. Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1, prove que o TVM visto no capítulo de derivadas como consequência do TVM para integrais.

Exercício 20 (*)**.** Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e $\alpha, \beta : I \to [a,b]$ deriváveis. Defina $\phi : I \to \mathbb{R}$ ponto $\phi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$ para todo $x \in I$. Prove que ϕ é derivável e

$$\phi'(x) = f(\beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x).$$

Exercício 21. Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ a função do Exercício 3 e $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $g(0) = 0$ e $g(x) = 1$ se $x > 0$. Mostre que f e g são integráveis, porém $g \circ f : [0,1] \to \mathbb{R}$ não é integrável.

Exercício 22 (*)**.** Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ com derivada integrável, seja $m = (a+b)/2$. Prove que $f(a) + f(b) = [2/(b-a)] \int_a^b [f(x) + (x-m)f'(x)]dx$.

Exercício 23. Sejam $f, p : [a,b] \to \mathbb{R}$ tais que f é contínua, p é integrável e $p(x) > 0$ para todo $x \in [a,b]$. Prove que, se

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = f(a) \int_a^b p(x)dx,$$

então existe $c \in (a,b)$ tal que $f(a) = f(x)$. Vale um resultado análogo com $f(b)$ no lugar de $f(a)$.