Lista de exercícios 6
Limite de funções

(Os exercícios marcados com (*) são os mais pertinentes).

Exercício 1 (*). Sejam $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$ e $Y = f(X \backslash \{a\})$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$, então $L \in \overline{Y}$.

Exercício 2 (*). Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Suponha que, para toda sequência (x_n) de pontos em $X\backslash\{a\}$, com $\lim x_n = a$, a sequência $\big(f(x_n)\big)$ seja convergente. Mostre que existe o limite $\lim_{x\to a} f(x)$.

Exercício 3. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : Y \to \mathbb{R}$, com $f(Y) \subset Y$, e sejam $a \in X'$ e $b \in Y' \cap Y$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = b$ e $\lim_{y\to b} g(y) = L$, prove que teremos $\lim_{x\to a} g\big(f(x)\big) = L$ desde que $c = g(b)$ ou então que $x \neq a \implies f(x) \neq b$.

Exercício 4. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

Mostre que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e $\lim_{y\to 0} g(y) = 0$, porém não existe $\lim_{x\to 0} g\big(f(x)\big)$.

Exercício 5 (*). Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(0) = 0$ e $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ para $x \neq 0$. Mostre que, para todo $c \in [-1, 1]$, existe uma sequência (x_n) de pontos $x_n \neq 0$ tal que $\lim x_n = 0$ e $\lim f(x_n) = c$.

Exercício 6 (*). Prove que $a \in X'_+$ (respectivamente $a \in X'_-$) se, e somente se, $a = \lim x_n$ é limite de uma sequência (x_n) decrescente (respectivamente, crescente) de pontos $x_n \in X$.

Exercício 7 (*). Prove que $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ (respectivamente, $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$) se, e somente se, para toda sequência (x_n) decrescente (respectivamente, crescente) de pontos $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$ tem-se $\lim f(x_n) = L$.

Exercício 8. Seja $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/(1 + a^{1/x})$, onde $a > 1$. Prove que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$.

Exercício 9 (*). Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ monótona e $a \in X'_+$. Suponha que existe uma sequência (x_n) de pontos $x_n > a$ com $\lim x_n = a$ tal que $\lim f(x_n) = L$. Prove que $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$.

Exercício 10. Seja $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{1+2^{1/x}}$, determine o conjunto dos números $L \in \mathbb{R}$ tais que $L = \lim f(x_n)$ para alguma sequência (x_n) de pontos $x_n \neq 0$ com $\lim x_n = 0$.

Exercício 11. Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial não constante, isto é, p é dada por $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, para algum $n \in \mathbb{N}$, com $a_n \neq 0$. Sejam $L = \lim_{x\to +\infty} p(x)$ e $M = \lim_{x\to -\infty} p(x)$. Prove que:

(1) Se n é par, então $L = M = +\infty$ se $a_n > 0$ e $L = M = -\infty$ se $a_n < 0$.

(2) Se n é ímpar, então $L = +\infty$ e $M = -\infty$ se $a_n > 0$, e $L = -\infty$ e $M = +\infty$ se $a_n < 0$.

Exercício 12 (*). Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x \operatorname{sen} x$. Prove que, para todo $c \in \mathbb{R}$, existe uma sequência (x_n) tal que $\lim x_n = +\infty$ e $\lim f(x_n) = c$.