

## Lista de exercícios 9

### Fórmula de Taylor, Aplicações da Derivada, Convexidade

*(Os exercícios marcados com (\*) são os mais pertinentes).*

**Exercício 1** (\*). Use a igualdade  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$  e a fórmula de Taylor para calcular as derivadas sucessivas, no ponto  $x = 0$ , da função  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ .

**Exercício 2.** Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  no intervalo  $I$ . Suponha que exista  $K > 0$  tal que  $|f^{(n)}(x)| \leq K$  para todo  $x \in I$  e todo  $n \in \mathbb{N}$ . Prove que, para  $x_0, x \in I$  quaisquer, vale  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ .

**Exercício 3.** Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  no intervalo  $I$ . Dado  $a \in I$ , defina  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\phi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  se  $x \neq a$  e  $\phi(a) = f'(a)$ . Prove que  $\phi$  é de classe  $C^1$ . Mostre que  $f \in C^3 \implies \phi \in C^2$ .

**Exercício 4.** Seja  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função polinomial de grau  $n$ . Prove que, para  $a; x \in \mathbb{R}$  quaisquer, tem-se

$$p(x) = p(a) + p'(a)(x - a) + \dots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n.$$

**Exercício 5.** Sejam  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  duas vezes deriváveis no ponto  $a \in \text{int } I$ . Se  $f(a) = g(a)$ ,  $f'(a) = g'(a)$  e  $f(x) \geq g(x)$  para todo  $x \in I$ , prove que  $f''(a) \geq g''(a)$ .

**Exercício 6** (\*). Sejam  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  funções convexas, com  $f(I) \subset J$  e  $g$  monótona não-decrescente. Prove que  $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é convexa. Dê outra demonstração supondo  $f$  e  $g$  duas vezes deriváveis. Por meio de um exemplo mostre que, se  $g$  não é monótona não-decrescente, o resultado pode não ser válido.

**Exercício 7** (\*). Se  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  possui um ponto crítico não degenerado  $c \in \text{int } I$  no qual  $f''$  é contínua, prove que existe  $\delta > 0$  tal que  $f$  é convexa ou côncava no intervalo  $(c - \delta, c + \delta)$ .

**Exercício 8** (\*). Examine a convexidade da soma e do produto de duas funções convexas.

**Exercício 9** (\*). Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função convexa. Suponha que, para todo  $x \in I$ , a sequência de números  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  convirja. Prove que a função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ , é convexa. Enuncie e demonstre um resultado análogo para funções côncavas.

**Exercício 10.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e convexa tal que  $f(a) < 0 < f(b)$ . Mostre que existe um único ponto  $c \in (a, b)$  com  $f(c) = 0$ .