Lista de exercícios 1: Espaços vetoriais

Exercício 1. Verifique se os seguintes conjuntos são subespaços de $\mathbb{R}^3$:

(a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0\}$.

(b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0\}$.

Exercício 2. Seja $V = \mathbb{R}^4$ e $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$. Mostre que W é um subespaço e determine sua dimensão.

Exercício 3. Determine se o conjunto $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Exercício 4. Mostre que o conjunto $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 1\}$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^4$.

Exercício 5. Seja $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y = 0\}$. Mostre que W é um subespaço e encontre sua base.

Exercício 6. Mostre que $\mathbb{R}^3$ pode ser escrito como uma soma direta dos subespaços

$$U = \{(x, 0, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}, \quad V = \{(0, y, -y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

Encontre bases para U e para V .

Exercício 7. Considere os subespaços de $\mathbb{R}^3$ dados por

$$W_1 = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}, \quad W_2 = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}.$$

Mostre que $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$.

Exercício 8. Seja $U = [(1, 0, 1), (0, 1, 1)]$ e $V = [(1, -1, 0)]$. Verifique se $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.

Exercício 9. Seja $S = \{(1, 2, 3), (0, 1, 1), (1, 3, 4)\}$. Determine se $(2, 5, 7)$ é combinação linear dos vetores de S .

Exercício 10. Seja $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0)\}$. Determine uma base para o subespaço gerado por S .

Exercício 11. Mostre que o conjunto $S = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ gera um subespaço de dimensão 2 em $\mathbb{R}^3$.

Exercício 12. Encontre uma base e a dimensão do subespaço gerado por $S = \{(1, 2, 3), (2, 4, 6), (1, 1, 1)\}$.

Exercício 13. Seja $S = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ com $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$, e $p_3(x) = x^2$. Mostre que S gera $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e determine se S é linearmente independente.

Exercício 14. Verifique se o conjunto $S = \{(1, 0, -1), (0, 1, 2), (1, 1, 1)\}$ gera $\mathbb{R}^3$.

Exercício 15. Determine uma base para o subespaço de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ gerado pelo conjunto

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercício 16. Considere os subespaços de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ dados por

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}, \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & d \end{pmatrix} \mid c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Mostre que $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = A \oplus B$.

Exercício 17. Determine se o vetor $(3, 6, 9, 12)$ pertence ao subespaço gerado por $S = \{(1, 2, 3, 4), (0, 1, 1, 1)\}$.

Exercício 18. Considere $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Determine se S é linearmente independente. Caso contrário, encontre um subconjunto linearmente independente que gera o mesmo subespaço.

Exercício 19. Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por $S = \{(1, 2, 3, 4), (0, 1, 1, 1), (1, 3, 4, 5)\}$. Determine a dimensão de W .

Exercício 20. Determine se os vetores $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 4, 6)$ e $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 1)$ em $\mathbb{R}^3$ são linearmente independentes.

Exercício 21. Mostre que o conjunto de vetores $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$ em $\mathbb{R}^3$ é linearmente dependente e encontre uma relação de dependência linear entre eles.

Exercício 22. Considere os vetores $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1)$ e $\mathbf{v}_3 = (1, 2, 1)$ em $\mathbb{R}^3$. Determine se eles são linearmente independentes.

Exercício 23. Seja $S = \{x^2 + 1, x + 1, 1\}$. Verifique se S é linearmente independente em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Exercício 24. Determine se os vetores $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1)$ em $\mathbb{R}^3$ formam um conjunto linearmente independente.

Exercício 25. Mostre que o conjunto $S = \{\sin(x), \cos(x), \sin(2x)\}$ é um subconjunto linearmente dependente do espaço de todas as funções reais.

Exercício 26. Mostre que o conjunto de vetores $\{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (2, 2, -1), (2, 0, -4)\}$ gera $\mathbb{R}^3$, mas não é linearmente independente.

Exercício 27. Seja $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Determine se S é linearmente independente. Caso contrário, encontre um subconjunto linearmente independente que gera o mesmo espaço.

Exercício 28. Verifique se o conjunto de todas as funções do tipo e^{ax} , com $a \in \{1, 2, 3\}$, é linearmente independente.

Exercício 29. Encontre uma base e a dimensão do subespaço gerado por $S = \{(1, 2, 3), (2, 4, 6), (1, 1, 1)\}$ em $\mathbb{R}^3$.

Exercício 30. Seja $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$. Encontre uma base e a dimensão de W .

Exercício 31. Mostre que o conjunto de todas as matrizes diagonais 2×2 com entradas reais forma um subespaço de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Determine uma base e sua dimensão.

Exercício 32. Seja $S = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$. Complete S para formar uma base de $\mathbb{R}^3$.

Exercício 33. Encontre a matriz de mudança de base do sistema de coordenadas $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ para $\{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$.

Exercício 34. Considere os vetores $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$ e $\mathbf{v}_2 = (2, 4)$. Eles formam uma base de $\mathbb{R}^2$? Justifique.

Exercício 35. Encontre as coordenadas do vetor $(3, 4, 5)$ em relação à base $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercício 36. Seja $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$, e $B' = \{(1, 1), (1, -1)\}$. Determine a matriz de mudança de base de B para B' .

Exercício 37. Considere o espaço vetorial $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Mostre que o conjunto $W = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : \text{tr}(A) = 0\}$ é um subespaço e determine sua dimensão.

Exercício 38. Verifique se o conjunto de todas as matrizes simétricas de ordem 2×2 forma um subespaço de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

Exercício 39. Seja V o espaço das funções reais definidas em $\mathbb{R}$ e $W = \{f \in V : f'(x) + f(x) = 0\}$. Mostre que W é um subespaço de V .

Exercício 40. Determine se o conjunto de todas as funções pares definidas em $\mathbb{R}$ forma um subespaço do espaço das funções reais.