Lista de exercícios 3: Matriz de uma transformação linear

Exercício 1. Determine a matriz associada à aplicação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y, z) = (2x - y, x + z, -y + 3z)$$

em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$.

Exercício 2. Encontre uma matriz $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, seja um isomorfismo.

Exercício 3. Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, onde A é uma matriz invertível. Mostre que T é um isomorfismo. Qual é a aplicação inversa T^{-1} de T?

Exercício 4. Encontre a matriz da aplicação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x + y, y - z)$ em relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$.

Exercício 5. Determine a matriz associada à aplicação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x-y, y+z, z-x)$.

Exercício 6. Considere $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ definido por $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a, b, c, d)$. Determine a matriz associada a T.

Exercício 7. Determine a matriz da aplicação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (2x - y, x + z)$ em relação à base $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

Exercício 8. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (2x + y, x - 3y)$. Determine a matriz de T em relação às bases $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e $B' = \{(1, 1), (1, -1)\}$.

Exercício 9. Determine a matriz de $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + 2y, y + z, z)$, em relação à base $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

Exercício 10. Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x - y, 2y - z)$. Encontre a matriz de T em relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$.

Exercício 11. Determine a matriz associada à aplicação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_3 + x_4)$$

em relação à base canônica.

Exercício 12. Seja $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ definida por $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + b, c + d)$. Mostre que T é linear e determine sua matriz associada.

Exercício 13. Considere $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dada por $T(p(x)) = p'(x)$, onde $p'(x)$ é a derivada de $p(x)$. Verifique que T é linear e determine a matriz de T em relação à base canônica $\{1, x, x^2\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Exercício 14. Seja $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(p(x)) = (p(0), p(1), p'(0))$. Determine a matriz de T em relação às bases canônicas de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^3$.

Exercício 15. Seja $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dado por $T(p(x)) = xp'(x)$. Verifique que T é linear e encontre a matriz de T em relação à base canonica $\{1, x, x^2\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.