

Lista de exercícios 4: Diagonalização de transformações lineares

Exercício 1. Em cada um dos casos abaixo, calcule os autovalores e autovetores da transformação linear (ou matriz), calcule seus auto-espacos associados e determine se a transformação é diagonalizável. Em caso afirmativo, diagonalize T .

(a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (y, 2y)$

(b) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (2y, x)$

(c) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (x + y, 2x + y)$

(d) $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4,$
 $T(x, y, z, w) = (x, x + y, x + y + z, x + y + z + w)$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(j) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(k) $\begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(l) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 14 \\ 2 & -7 & 14 \\ 2 & -4 & 11 \end{pmatrix}$

(m) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(n) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(o) $\begin{pmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

(p) $\begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ -10 & -5 & -3 \end{pmatrix}$

(q) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ -3 & 7 & -3 \\ 6 & 12 & 5 \end{pmatrix}$

(r) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \\ -8 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

Exercício 2. Para as letras (a), (b), (e), (f), (g) e (h) do Exercício 1, encontre uma fórmula para T^n , $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 3. Seja $T : V \rightarrow V$ transformação com polinômio característico $p_T(x) = (x + 1)^3(x - 3)(x + 3)^2$.

- (a) Qual a dimensão de V ?
- (b) Quais as possibilidades para o polinômio minimal de T ?
- (c) Se T for diagonalizável, qual o polinômio minimal de T ?

Exercício 4. Sejam $\lambda \neq \mu$ autovalores de uma transformação linear $T : V \rightarrow V$. Mostre que $V_\lambda \cap V_\mu = \{0\}$.

Exercício 5. Seja $T : V \rightarrow V$ transformação linear com polinômio característico $p_T(z) = (x - 2)^3(x + 3)^2$.

- (a) Quais são as possibilidades para $\dim V_2$ e $\dim V_{-3}$?
- (b) Se T for diagonalizável, quanto vale $\dim V_2$ e $\dim V_{-3}$?