

## Lista de exercícios 5: Produto interno e norma

**Exercício 1.** Decida quais das funções abaixo são produtos internos em  $\mathbb{R}^2$ . Em caso afirmativo, verifique as propriedades que definem produto interno. Em caso negativo, justifique dizendo quais propriedades falham.

- |                                                                                 |                                                                                 |
|---------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| a) $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1x_2 + y_1y_2$                   | e) $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 2(x_1x_2 + y_1y_2)$                |
| b) $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1x_2 - y_1y_2$                   | f) $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + 1$               |
| c) $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + y_1y_2$ | g) $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1x_2 - x_1y_2 + x_2y_1 + y_1y_2$ |
| d) $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 3x_1x_2 + 15y_1y_2$                | h) $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = (x_1 + y_1)y_2$                    |

**Exercício 2.** Seja  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  o espaço vetorial das matrizes reais de ordem 2 por 2. Verifique que a aplicação  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right\rangle = a_{11}b_{11} + 2a_{12}b_{12} + 3a_{21}b_{21} + 4a_{22}b_{22},$$

é um produto interno em  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ . Determine a norma  $\|\cdot\|$  associada a este produto interno. Considere  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$   $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Calcule:

- |            |                |                                   |
|------------|----------------|-----------------------------------|
| a) $\ A\ $ | c) $\ A + B\ $ | e) $\langle A, B \rangle$         |
| b) $\ B\ $ | d) $\ A - B\ $ | f) $\langle A + B, A - B \rangle$ |

**Exercício 2.** Seja  $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$  o espaço vetorial das funções  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas. Defina em  $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$  a aplicação  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R}) \times \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  pela fórmula

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx.$$

Verifique que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é um produto interno em  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ . Determine a norma  $\|\cdot\|$  associada a este produto interno. Considere  $f(x) = 1 + x$  e  $g(x) = x^2$ . Calcule:

- |            |                |                                   |
|------------|----------------|-----------------------------------|
| a) $\ f\ $ | c) $\ f + g\ $ | e) $\langle f, g \rangle$         |
| b) $\ g\ $ | d) $\ f - g\ $ | f) $\langle f + g, f - g \rangle$ |

**Exercício 3.** Seja  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  o espaço vetorial das funções polinomiais reais de grau menor ou igual à 2. Defina a aplicação  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  pela expressão

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

Verifique que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é um produto interno em  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ . Determine a norma  $\|\cdot\|$  associada a este produto interno. Considere  $p(x) = 1 + x$  e  $q(x) = x^2$ . Calcule:

- |            |                |                                   |
|------------|----------------|-----------------------------------|
| a) $\ p\ $ | c) $\ p + q\ $ | e) $\langle p, q \rangle$         |
| b) $\ q\ $ | d) $\ p - q\ $ | f) $\langle p + q, p - q \rangle$ |